



FACULTAD DE CIENCIAS

**Sobre la fibración de Hopf  
y la paralelización de esferas**

*(On the Hopf fibration and the parallelization of spheres)*

**Pedro R. López Gómez**

TRABAJO DE FIN DE GRADO  
PARA ACCEDER AL

**Grado en Matemáticas**

DIRECTOR: FERNANDO ETAYO GORDEJUELA

FEBRERO – 2020



*It is wrong always, everywhere, and for anyone, to  
believe anything upon insufficient evidence.*

WILLIAM KINGDON CLIFFORD



## AGRADECIMIENTOS

Antes de comenzar a jugar con las matemáticas, y aun siendo consciente de que mis palabras, si bien necesarias, puede que no sean suficientes, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a las siguientes personas:

Al director de este trabajo, Prof. Fernando Etayo Gordejuela, por su tiempo, su dedicación y su paciencia a la hora de resolver mis dudas y leer mis interminables correos, enviados, en ocasiones, a horas ciertamente intempestivas; asimismo, por las magníficas ideas que me ha brindado durante la realización de este trabajo y por el excelente trato que me ha dispensado siempre.

Al profesor Maurizio Parton, de la Università di Chieti-Pescara, por proporcionarnos el artículo de Marcello Bruni que de otro modo habría sido prácticamente imposible de encontrar. *Grazie mille per questo favore, Maurizio.*

Al conjunto de profesores del Doble Grado en Física y Matemáticas; en particular, dado que éste es un trabajo de matemáticas, a los profesores del Grado en Matemáticas, por su tiempo, su esfuerzo y por estar siempre dispuestos a resolver las numerosas dudas con que en ocasiones los bombardeamos.

Al personal de la Facultad de Ciencias, desde la biblioteca a la cafetería. En particular, a Miguel, por todos los cafés que me ha servido estos años, hasta el punto de que ya no necesitaba casi ni pedirlos, y haberlo hecho siempre con gran diligencia y excelente trato personal.

A mis once compañeros del Doble Grado, pues es para mí un orgullo el haber podido compartir estos años de duro trabajo junto a personas de tal talla intelectual y humana, y lo es, por tanto, aún más el poder considerarlos mis amigos. Asimismo, al señor Pablo Señas, amigo cuyas agradables y enriquecedoras conversaciones sobre temas matemáticos y no matemáticos siempre son de agradecer.

Finalmente, quisiera darle las gracias a mis padres y a mi hermana, por estar siempre a mi lado y por todo lo que hacen por mí, y sin cuya ayuda estos años habrían sido aún más duros; y a Celia, por su cariño y su apoyo, por aguantarme y por tener fe en que cumpliría el plazo de entrega de este trabajo hasta cuando yo mismo lo dudaba.



RESUMEN. La fibración de Hopf y la paralelización de esferas son dos temas en los cuales las álgebras de división normadas  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  subyacen de forma muy notable, y su estudio arroja bellas conexiones entre campos aparentemente alejados, como la teoría de álgebras y la topología diferencial. Con el objetivo de comprender mejor ambos temas y mostrar algunas de las conexiones mencionadas, en este trabajo se estudian, por un lado, diferentes construcciones de la fibración clásica de Hopf y su generalización a esferas de otras dimensiones; por otro lado, se construyen de forma explícita paralelizaciones y estructuras casi complejas de esferas, así como paralelizaciones del producto de éstas.

PALABRAS CLAVE: Álgebras de división normadas, estructuras casi complejas, fibración de Hopf, paralelización de esferas.

ABSTRACT. The Hopf fibration and the parallelization of spheres are two topics in which the normed division algebras  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  and  $\mathbb{O}$  underlie very noticeably, and their study throws beautiful connections between seemingly distant fields, such as theory of algebras and differential topology. With the aim of better understanding both issues and of showing some of the aforementioned connections, in this dissertation we study, on the one hand, different constructions of the classical Hopf fibration and its generalization to spheres of other dimensions; on the other hand, we explicitly construct parallelizations and almost complex structures of spheres as well as parallelizations of their product.

KEY WORDS: Normed division algebras, almost complex structures, Hopf fibration, parallelization of spheres.





# Índice

INTRODUCCIÓN . . . . .	1
CAPÍTULO 1. PRELIMINARES . . . . .	3
1.1. Las cuatro álgebras de división normadas: $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$ , $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ . . . . .	3
1.1.1. Cuaterniones . . . . .	6
1.1.2. Octoniones . . . . .	7
1.1.3. La construcción de Cayley–Dickson . . . . .	8
1.2. Las esferas y la proyección estereográfica . . . . .	12
1.3. Topología diferencial . . . . .	13
1.3.1. Variedades diferenciables . . . . .	13
1.3.2. Campos vectoriales . . . . .	15
1.3.3. Estructuras complejas y casi complejas . . . . .	16
1.4. Geometría proyectiva . . . . .	18
1.5. Número de enlace de curvas cerradas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
CAPÍTULO 2. LA FIBRACIÓN DE HOPF . . . . .	21
2.1. Construcción de la fibración de Hopf con coordenadas reales . . . . .	21
2.2. Construcción de la fibración de Hopf mediante cuaterniones . . . . .	24
2.2.1. Rotaciones y cuaterniones . . . . .	24
2.2.2. Las rotaciones y la fibración de Hopf . . . . .	29
2.2.3. La fibración de Hopf a través de la proyección estereográfica . . . . .	33
2.3. Construcciones proyectivas de las fibraciones de Hopf . . . . .	37
2.3.1. La fibración de Hopf cuaterniónica y las esferas exóticas de Milnor . . . . .	39
2.3.2. Generalizaciones proyectivas de las fibraciones de Hopf . . . . .	39
CAPÍTULO 3. PARALELIZACIÓN DE ESFERAS . . . . .	41
3.1. Paralelizabilidad y estructuras casi complejas en las esferas . . . . .	41
3.1.1. Construcción explícita de estructuras casi complejas en $S^2$ y $S^6$ . . . . .	43
3.1.2. El problema de Hopf . . . . .	45
3.2. Paralelización explícita del producto de esferas . . . . .	45
3.2.1. Una familia particular de matrices simétricas . . . . .	46
3.2.2. Campos meridianos . . . . .	47
3.2.3. Campos meridianos coordinados . . . . .	49
3.2.4. Producto de una hipersuperficie paralelizable por una esfera . . . . .	50
3.2.5. Paralelización del producto de tres o más esferas . . . . .	51
REFERENCIAS . . . . .	53



# Introducción

Antes de mostrar la relación que existe entre los dos temas presentes en el título de este trabajo, me gustaría comenzar citando al matemático húngaro-estadounidense Paul Halmos, quien afirmó lo siguiente:

*I see mathematics, the part of human knowledge that I call mathematics, as one thing —one great, glorious thing. Whether it is differential topology, or functional analysis, or homological algebra, it is all one thing. . . They are intimately interconnected, they are all facets of the same thing. That interconnection, that architecture, is secure truth and is beauty. That's what mathematics is to me.*<sup>1</sup>

Es la idea de la existencia de interconexiones entre las distintas ramas de la matemática, y su concepción como un todo en el que no caben compartimentos aislados del resto, la que me parece relevante destacar, pues siempre es enriquecedor ser testigo de esa belleza, de esa arquitectura, de esa verdad segura de la que habla Halmos, y que se puede percibir en todos los niveles de la matemática, incluso en el de un mero estudiante como quien suscribe. Partiendo de esta reflexión, consideremos ahora los siguientes hechos: en primer lugar, que solamente existen cuatro fibraciones en las cuales el espacio total, el espacio base y las fibras sean todos esferas, a saber,

$$\begin{aligned}h_{\mathbb{R}} : S^0 &\hookrightarrow S^1 \longrightarrow S^1 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{R}), \\h_{\mathbb{C}} : S^1 &\hookrightarrow S^3 \longrightarrow S^2 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \\h_{\mathbb{H}} : S^3 &\hookrightarrow S^7 \longrightarrow S^4 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{H}), \\h_{\mathbb{O}} : S^7 &\hookrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{O}).\end{aligned}$$

Por otro lado, que las únicas esferas que son paralelizables, esto es, que admiten una base global de campos vectoriales, son las de dimensión 1, 3 y 7. En otras palabras, los conjuntos de elementos de norma uno de  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ . El punto de unión aparente, y el que aparecerá de forma más clara a lo largo del trabajo, radica en las álgebras de división normadas y en el hecho de que solamente existan cuatro: los números reales  $\mathbb{R}$ , los complejos  $\mathbb{C}$ , los cuaterniones  $\mathbb{H}$  y los octoniones  $\mathbb{O}$ . Sin embargo, existe un nexo aún más profundo entre los dos hechos descritos: el invariante de Hopf. De hecho, ambos resultados son una consecuencia del teorema probado en 1958 por el matemático británico John Frank Adams en su artículo [Ada60], con el que culminó sus trabajos en topología algebraica en la década de 1950, y que afirma que una aplicación de  $S^{2n-1}$  en  $S^n$  tiene invariante de Hopf 1 si y solamente si  $n = 2, 4$  u  $8$ . El nombre de Heinz Hopf aparece ligado también a la segunda de las fibraciones mencionadas, que hoy lleva el nombre de aplicación o fibración de Hopf en su honor, pues fue quien la descubrió en 1931 en lo que constituyó un hallazgo sorprendente y un avance espectacular en el campo de la topología algebraica y, en particular, en la teoría de homotopía, pues permitió probar que el grupo de homotopía  $\pi_3(S^2)$  es no trivial. La fibración de Hopf y la paralelización de esferas, de hecho, no sólo se encuentran conectadas a nivel conceptual, como hemos visto, sino también en lo que respecta a las personas que trabajaron en dichos temas. Así, tenemos que el matemático francés Michel Kervaire, como parte de su tesis doctoral [Ker56] dirigida, entre otros, por el mismo Heinz Hopf, probó un resultado relativo a la paralelización del producto de esferas que, intuitivamente, resulta ciertamente contrario a lo probado por Adams, a saber, que el producto de esferas es paralelizable siempre y cuando una de ellas tenga dimensión impar. La prueba de Kervaire de este resultado, sin embargo, no es constructiva.

Por otra parte, a partir de la parte imaginaria de  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  se pueden definir sendos productos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^7$  —de hecho, son los únicos espacios  $\mathbb{R}^n$  en los que existe el producto vectorial— que, a su vez, permiten definir estructuras casi complejas en  $S^2$  y  $S^6$ . La relación con los temas anteriores no se limita al empleo de estas álgebras de división normadas, sino que el teorema de Kirchhoff, probado por Adrian Kirchhoff en 1947 en su artículo [Kir47], establece que si  $S^n$  admite estructura casi compleja, entonces

---

<sup>1</sup>P. R. Halmos. *Paul Halmos: Celebrating 50 years of mathematics*. Ed. por J. H. Ewing y F. W. Gehring. Springer, 1991

$S^{n+1}$  es paralelizable. Este teorema, combinado con el resultado de Adams, implica que las únicas esferas que admiten estructura casi compleja son  $S^2$  y  $S^6$ , lo cual fue demostrado independientemente por Armand Borel y Jean-Pierre Serre en 1951 ([BS51]). Siguiendo con estas esferas, si bien  $S^2$  es una variedad holomorfa, pues es la recta proyectiva compleja, se desconoce, en cambio, si  $S^6$  lo es. La cuestión de determinar si  $S^6$  es o no una variedad holomorfa se conoce como *problema de Hopf* y permanece abierta desde los años cincuenta del pasado siglo.

A pesar de que, como hemos dicho, el nexo profundo entre la fibración de Hopf y la paralelización de esferas es el invariante de Hopf, el estudio apropiado de éste requeriría manejar conceptos muy avanzados de topología algebraica y su desarrollo habría supuesto sacrificar gran parte de los cálculos explícitos mostrados en este trabajo debido a los límites de tiempo y espacio que, naturalmente, existen. Dado que entendemos que estos cálculos juegan un papel importante en la comprensión de los temas desarrollados, se ha preferido limitar la exposición a considerar las álgebras de división normadas como nexo entre la fibración de Hopf y la paralelización de esferas, aun siendo conscientes de que su punto de unión auténtico es el invariante de Hopf.

De acuerdo con lo dicho, en el Capítulo 1 introduciremos algunos conceptos de teoría de álgebras necesarios para definir y comprender las álgebras de división normadas, para lo cual se ha seguido, como referencia básica, el artículo [Bae02] de J. C. Baez; muchos de los resultados presentes en dicho artículo son enunciados sin demostrarlos, por lo que parte de mi tarea al respecto ha consistido en realizar estas demostraciones con detalle. Asimismo, en este capítulo incluimos otros conceptos y resultados ya conocidos, como la mayoría de los relativos a topología diferencial y geometría proyectiva, las esferas y la proyección estereográfica, además de otros que, al igual que las álgebras, no han sido estudiados previamente por quien suscribe, como las estructuras complejas y casi complejas o el número de enlace; éste último, de hecho, constituye un caso particular del invariante de Hopf.

A continuación, en el Capítulo 2 abordaremos la construcción de la fibración clásica de Hopf desde tres puntos de vista diferentes, a saber, empleando coordenadas reales, cuaterniones y geometría proyectiva; esta última construcción nos permitirá, además, extenderla de forma natural a esferas de otras dimensiones. La referencia básica para este capítulo es el artículo [Lyo03] de D. W. Lyons, en el cual se basa la construcción realizada con cuaterniones. Cabe señalar que no hay una única formulación de la fibración clásica de Hopf, pues dependiendo de la construcción se pueden encontrar diferentes expresiones en la literatura; en este trabajo se ha realizado un esfuerzo considerable por unificar las formulaciones encontradas, lo que ha obligado a modificar parte de lo realizado en las referencias.

Finalmente, en el Capítulo 3 construiremos de forma explícita las paralelizaciones de esferas y de productos de esferas, así como las estructuras casi complejas de  $S^2$  y  $S^6$ . La referencia básica para este capítulo es el artículo [Bru92] de M. Bruni; aunque en éste sí que aparecen, por norma general, las pruebas de los resultados con mayor o menor detalle, se han completado aquéllas que requerían una mayor explicación. Asimismo, en este trabajo se han construido las paralelizaciones de  $S^1$ ,  $S^3$  y  $S^7$  a partir de las estructuras casi complejas de los espacios ambiente, algo que no aparece en el artículo citado.

Con todo lo dicho hasta ahora es fácil deducir que el presente trabajo se enmarca, en líneas generales, dentro del ámbito de la topología diferencial. Sin embargo, cabe destacar que el desarrollo del mismo ha requerido también el uso de conceptos básicos de otras disciplinas, como la teoría de álgebras o la geometría proyectiva.

Los temas expuestos en esta memoria no se encuentran desarrollados sistemáticamente en ningún libro, por lo que los artículos [Bae02], [Lyo03] y [Bru92] ya mencionados constituyen las referencias principales de este trabajo. En la bibliografía se encuentran, por supuesto, el resto de libros y artículos consultados, así como los trabajos clásicos de los temas desarrollados y otras referencias para el lector que desee un tratamiento más profundo o detallado de alguno de los aspectos relacionados con éstos.

En cuanto a la originalidad del trabajo, ésta no radica en la presentación de resultados novedosos, pues no los hay, sino más bien en la estructuración conjunta de temas que suelen aparecer por separado en la literatura, como son la fibración de Hopf y la paralelización de esferas; en la presentación unificada y el estudio detallado de las diferentes construcciones de la fibración clásica de Hopf; en la construcción explícita de las expresiones de las paralelizaciones y las estructuras casi complejas de las esferas, y, como ya hemos dicho, en la realización de aquellas demostraciones que no se encontraban desarrolladas en las referencias empleadas. Las ilustraciones son también de elaboración propia, salvo aquellas en las que se cite expresamente la fuente, y han sido elaboradas mediante el paquete `tikz` de LaTeX.

## Preliminares

INTRODUCCIÓN. Los temas tratados en los siguientes capítulos requieren de algunos conocimientos previos de diferentes áreas de la matemática para poder comprenderlos en su totalidad, por lo que creemos necesario dedicar unas pocas páginas a establecer estos requisitos de forma que el lector los tenga presentes a lo largo del trabajo. Así pues, comenzaremos introduciendo algunos conceptos relativos a la teoría de álgebras, con particular énfasis en las álgebras de división normadas  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ , y culminaremos esa sección con la construcción de Cayley–Dickson, que nos permitirá comprender algunas de las propiedades más relevantes de dichas álgebras; tras ello, recordaremos brevemente algunos conceptos básicos de topología diferencial e introduciremos las estructuras complejas y casi complejas, que serán de utilidad a lo largo del trabajo; posteriormente, tras recodar la noción de esfera  $n$ -dimensional y la proyección estereográfica, realizaremos un breve repaso de geometría proyectiva; por último, finalizaremos el capítulo con una definición sencilla del número de enlace de curvas cerradas en  $\mathbb{R}^3$ .

---

### ÍNDICE

1.1. Las cuatro álgebras de división normadas: $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$ , $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ . . . . .	3
1.1.1. Cuaterniones . . . . .	6
1.1.2. Octoniones . . . . .	7
1.1.3. La construcción de Cayley–Dickson . . . . .	8
1.2. Las esferas y la proyección estereográfica . . . . .	12
1.3. Topología diferencial . . . . .	13
1.3.1. Variedades diferenciables . . . . .	13
1.3.2. Campos vectoriales . . . . .	15
1.3.3. Estructuras complejas y casi complejas . . . . .	16
1.4. Geometría proyectiva . . . . .	18
1.5. Número de enlace de curvas cerradas en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20

---

### 1.1. Las cuatro álgebras de división normadas: $\mathbb{R}$ , $\mathbb{C}$ , $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$

Como ya se ha mencionado, las álgebras de división normadas constituyen el punto de unión entre las dos partes principales de este trabajo y subyacen tras muchos de los resultados más relevantes de éste, por lo que es conveniente dedicar un poco de tiempo a introducir algunas definiciones y resultados relativos a aquéllas.<sup>1</sup>

DEFINICIÓN 1.1. Un *álgebra*  $A$  es un espacio vectorial<sup>2</sup> equipado con una aplicación bilineal  $m: A \times A \rightarrow A$ , denominada *producto* o *multiplicación*, y un elemento no nulo  $1 \in A$ , denominado *unidad*, tal que  $m(1, a) = m(a, 1) = a$  para todo  $a \in A$ . Como es habitual, denotaremos  $m(a, b)$  como  $ab$ .

OBSERVACIÓN 1.2. Nótese que no hemos exigido que el producto interno definido en el álgebra sea asociativo. Un poco más adelante introduciremos algunos conceptos que nos permitirán discutir los diferentes grados de asociatividad de un álgebra.

---

<sup>1</sup>Salvo que se indique lo contrario, la referencia para esta sección es el artículo de J. C. Baez: The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39 (2002), n.º 2, 145–205. En este artículo los resultados son, en general, enunciados sin demostrarlos, por lo que parte de mi tarea al respecto ha consistido en realizar dichas demostraciones.

<sup>2</sup>De ahora en adelante, para nosotros un espacio vectorial será siempre un módulo de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales.

OBSERVACIÓN 1.3. Dada un álgebra  $A$ , se puede pensar en los números reales como elementos del álgebra sin más que considerar la inclusión  $\lambda \mapsto \lambda 1$  para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

DEFINICIÓN 1.4. Sea  $A$  un álgebra. Se dice que  $A$  es un *álgebra de división* si para todo  $a, b \in A$ , con  $ab = 0$ , se tiene que  $a = 0$  o  $b = 0$ .

PROPOSICIÓN 1.5. Sea  $A$  un álgebra de división. Entonces, se verifica que

$$\forall a, b \in A, b \neq 0, \exists! x, y \in A : a = bx, a = yb.$$

DEMOSTRACIÓN. Por reducción al absurdo, supongamos que existen  $x_1, x_2 \in A$ ,  $x_1 \neq x_2$ , tales que  $a = bx_1 = bx_2$ . Entonces, se tiene que  $b(x_1 - x_2) = 0$ , lo cual es un absurdo, pues partíamos de que  $A$  es un álgebra de división. Por tanto, ha de ser  $x_1 = x_2$ . Análogamente, si suponemos que existen  $y_1, y_2 \in A$ ,  $y_1 \neq y_2$ , tales que  $a = y_1b = y_2b$ , llegamos a que  $y_1 = y_2$ , como queríamos probar.  $\square$

DEFINICIÓN 1.6. Sea  $A$  un álgebra. Se dice que  $A$  es un *álgebra de división normada* si es un espacio vectorial normado y la norma verifica que  $\|ab\| = \|a\| \|b\|$  para todo  $a, b \in A$ .

OBSERVACIÓN 1.7. Es claro que las condiciones de la Definición 1.6 implican que  $A$  es un álgebra de división y que  $\|1\| = 1$ .

DEFINICIÓN 1.8. Decimos que un álgebra  $A$  tiene *inversos multiplicativos* si para todo elemento no nulo  $a \in A$  existe un elemento no nulo  $a^{-1} \in A$  tal que  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ .

PROPOSICIÓN 1.9. Sea  $A$  un álgebra asociativa.  $A$  posee inversos multiplicativos si y sólo si es un álgebra de división.<sup>3</sup>

DEMOSTRACIÓN. Probemos ambas implicaciones:

- $\Rightarrow$  : Por reducción al absurdo, supongamos que  $A$  no es un álgebra de división. Entonces, existirán  $a, b \in A$  tales que  $a, b \neq 0$  y  $ab = 0$ . Dado que  $A$  posee inversos multiplicativos, se tendrá que

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = 0 \Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0,$$

donde hemos hecho uso de la asociatividad de  $A$ ; así, hemos llegado a que  $b = 0$ , lo cual es un absurdo, pues habíamos supuesto  $b \neq 0$ . Por tanto, queda probado que  $A$  es un álgebra de división.

- $\Leftarrow$  : Supongamos ahora que  $A$  es un álgebra de división. Sea  $b \in A$ ,  $b \neq 0$ ; si en la Proposición 1.5 tomamos  $a = 1$ , se tendrá que existen  $x, y \in A$  de forma única tales que  $bx = 1 = yb$ . Por tanto,

$$y = y1 = y(bx) = (yb)x = 1x = x,$$

donde hemos hecho uso de la asociatividad de  $A$ . Así pues, tomando  $b^{-1} = x = y$ , se concluye que, para todo elemento  $b \in A$  no nulo, existe  $b^{-1} \in A$  tal que  $bb^{-1} = b^{-1}b = 1$ , como queríamos probar.  $\square$

DEFINICIÓN 1.10. Un álgebra  $A$  se dice *potencia-asociativa* si la subálgebra generada por cualquier elemento de  $A$  es asociativa.

DEFINICIÓN 1.11. Un álgebra  $A$  se dice *alternativa* si la subálgebra generada por dos elementos cualesquiera de  $A$  es asociativa.

DEFINICIÓN 1.12. Un álgebra  $A$  se dice *asociativa* si la subálgebra generada por tres elementos cualesquiera de  $A$  es asociativa.

El siguiente resultado, debido a Emil Artin, proporciona una forma sencilla de verificar si un álgebra es o no alternativa:

TEOREMA 1.13 (Teorema de Artin). Un álgebra  $A$  es alternativa si y sólo si para todo  $a, b \in A$  se verifica.<sup>4</sup>

$$(1.1) \quad (aa)b = a(ab), \quad (ab)a = a(ba), \quad (ba)a = b(aa),$$

<sup>3</sup>Este resultado no es cierto, en general, para álgebras no asociativas. Como comentaremos en la Subsección 1.1.3, los sedeniones  $\mathbb{S}$  forman un álgebra 16-dimensional que posee inversos multiplicativos, pero no es un álgebra de división; asimismo, en [Bae02, Section 1.1] se da un ejemplo de álgebra de división sin inversos multiplicativos.

<sup>4</sup>Otra posible forma de enunciarlo es ésta: La subálgebra generada por dos elementos cualesquiera  $a, b$  de un álgebra alternativa  $A$  es asociativa; ésta es la que aparece en el libro de R. D. Schafer: *An Introduction to Nonassociative Algebras*. Academic Press Inc, New York, 1966, donde se puede encontrar también su demostración.

OBSERVACIÓN 1.14. La primera y la tercera de las expresiones de (1.1) se denominan *leyes alternativas a izquierda y derecha*, respectivamente, mientras que la segunda se denomina *ley flexible*.

De hecho, se puede deducir cualquiera de las ecuaciones de (1.1) dadas las otras dos, por lo que generalmente se toman la primera y la tercera como definición de ‘alternativa’. Para probar esto, sin embargo, necesitamos introducir un nuevo concepto:

DEFINICIÓN 1.15. Sea  $A$  un álgebra. Se define el *asociador* de  $A$  como la aplicación trilineal siguiente:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot, \cdot]: \quad A^3 &\longrightarrow A \\ (a, b, c) &\longmapsto [a, b, c] = (ab)c - a(bc) \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.16. Dada un álgebra  $A$  y  $a, b \in A$ , podemos reescribir las ecuaciones dadas en (1.1) en términos del asociador de la siguiente manera:

$$(1.2) \quad [a, a, b] = 0,$$

$$(1.3) \quad [a, b, a] = 0,$$

$$(1.4) \quad [b, a, a] = 0.$$

PROPOSICIÓN 1.17. Sea  $A$  un álgebra que verifica (1.2) y (1.4). Entonces,  $A$  verifica también (1.3).

DEMOSTRACIÓN. Para probar esta afirmación, veamos primero que  $[a, b, c] = -[b, a, c]$  para todo  $a, b, c \in A$ . Aplicando (1.2) y teniendo en cuenta que el asociador es trilineal, se tiene que

$$0 = [a + b, a + b, c] = [a, a, c] + [a, b, c] + [b, a, c] + [b, b, c] = [a, b, c] + [b, b, c] \implies [a, b, c] = -[b, a, c].$$

Finalmente, aplicando lo anterior al caso  $c = a$  y haciendo uso de (1.4), se obtiene que  $[a, b, a] = -[b, a, a] = 0$ , como queríamos probar.  $\square$

Una vez que hemos introducido estas ligeras nociones sobre álgebras, podemos enunciar algunos resultados de gran relevancia que muestran el especial carácter de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ . En primer lugar, tenemos el siguiente teorema, debido a Adolf Hurwitz<sup>5</sup>:

TEOREMA 1.18 (Teorema de Hurwitz).  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  son las únicas álgebras de división normadas.

Asimismo, Max Zorn<sup>6</sup> probó en 1930 el siguiente resultado:

TEOREMA 1.19.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  son las únicas álgebras de división alternativas.

Por último, si bien no es cierto que  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  sean las únicas álgebras de división, sí que se tiene un resultado ciertamente curioso, probado independientemente por Kervaire<sup>7</sup> y Bott–Milnor<sup>8</sup> en 1958:

TEOREMA 1.20. Todas las álgebras de división tienen dimensión 1, 2, 4 u 8.

Tal y como mencionamos en la introducción de este trabajo, y como iremos descubriendo en los próximos capítulos, estos resultados, que son puramente algebraicos, están fuertemente relacionados con otros de carácter geométrico y topológico.

En la Subsección 1.1.3 introduciremos nuevos conceptos relacionados con las álgebras, pero antes de seguir es conveniente realizar un breve repaso de las álgebras de división normadas. Dado que suponemos que los números reales y complejos son suficientemente conocidos por el lector, comencemos directamente por la siguiente de dichas álgebras: los cuaterniones.

<sup>5</sup>A. Hurwitz. Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1898), 309–316.

<sup>6</sup>M. Zorn. Theorie der alternativen Ringe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 8 (1930), 123–147.

<sup>7</sup>M. Kervaire. Non-parallelizability of the  $n$ -sphere for  $n > 7$ . *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 44 (1958), 280–283.

<sup>8</sup>R. Bott y J. Milnor. On the parallelizability of spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64 (1958), 87–89.

**1.1.1. Cuaterniones.** Es posible que el lector haya escuchado alguna vez la célebre historia sobre cómo el matemático irlandés William Rowan Hamilton<sup>9</sup> (1805–1865) descubrió los cuaterniones a mediados del siglo XIX. Fascinado por la relación entre  $\mathbb{C}$  y la geometría del plano, Hamilton buscaba una forma de caracterizar las rotaciones en el espacio tridimensional de forma análoga al caso de las rotaciones en el plano; ya en 1835, había aprendido a tratar los números complejos como pares de números reales, y el problema de las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  estaba resuelto: el ángulo de una rotación era el formado por el propio número complejo, como vector de  $\mathbb{R}^2$ , con el eje real positivo, y la composición de dos rotaciones se reducía a la simple multiplicación de los números complejos correspondientes. Durante años, Hamilton trató, sin éxito, de encontrar una solución al problema de las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  utilizando 3-tuplas de números reales; no fue, sin embargo, hasta octubre de 1843 cuando comprendió que no necesitaba 3-tuplas, sino 4-tuplas de números reales: los cuaterniones. Cuenta la leyenda que el momento exacto del descubrimiento tuvo lugar el 16 de octubre de 1843, mientras paseaba con su esposa a lo largo del Royal Canal de Dublín camino de una reunión de la Royal Irish Academy. En palabras del propio Hamilton:

*That is to say, I then and there felt the galvanic circuit of thought close; and the sparks which fell from it were the fundamental equations between  $i, j, k$ ; exactly such as I have used them ever since.*<sup>10</sup>

Estas ecuaciones a las que se refiere Hamilton, y que grabó en la piedra del puente de Brougham aquel lunes de octubre de 1843, son las siguientes:

$$(1.5) \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Como ya hemos mencionado, el conjunto de los cuaterniones, que denotaremos mediante  $\mathbb{H}$ , es un álgebra de división normada. Como espacio vectorial real tiene dimensión 4 y una base es la dada por  $\{1, i, j, k\}$ . Así pues, podemos definir  $\mathbb{H}$  de la siguiente manera:

$$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Para multiplicar dos cuaterniones basta con tener en cuenta la regla dada en (1.5), unida a las dos siguientes:

$$(1.6) \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

$$(1.7) \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Como podemos observar en (1.6) y (1.7), los elementos  $i, j$  y  $k$  no conmutan, lo que provoca que el producto de cuaterniones no sea conmutativo. En cuanto al resto de propiedades, es fácil comprobar que  $(\mathbb{H}, +)$  es grupo abeliano y que  $(\mathbb{H}^*, \cdot)$  es grupo no abeliano, por lo que diremos que  $\mathbb{H}$  es un cuerpo no conmutativo o un anillo de división. En términos de álgebras, diremos que  $\mathbb{H}$  es un álgebra de división normada asociativa.

Así como  $\mathbb{C}$  es idéntico, como conjunto y como espacio vectorial, a  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H}$  es idéntico a  $\mathbb{R}^4$ . De hecho, es fácil ver que  $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ , con los isomorfismos triviales  $a + bi + cj + dk \cong (a + bi, c + di) \cong (a, b, c, d)$ . Así, al igual que el elemento  $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$  es denotado como  $i$  cuando lo pensamos como número complejo, los elementos  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^4$  serán denotados, respectivamente, como  $i, j$  y  $k$  cuando hablemos de cuaterniones. Dado un cuaternión  $r = a + bi + cj + dk$ , el número real  $a$  se denominará parte real, mientras que los números reales  $b, c$  y  $d$  serán, respectivamente, las partes imaginarias  $i, j$  y  $k$  del cuaternión. En caso de que la parte real del cuaternión sea cero, lo denominaremos un cuaternión puro.

Para cada cuaternión  $r = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ , definimos su conjugado como  $\bar{r} = a - bi - cj - dk$ . La norma<sup>11</sup> de  $r$  es su módulo como vector de  $\mathbb{R}^4$  y, por tanto, vendrá dada por  $\|r\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{r\bar{r}}$ . Dado que  $\mathbb{H}$  es un álgebra de división normada, se verifica que, para cualesquiera  $r, s \in \mathbb{H}$ ,  $\|rs\| = \|r\|\|s\|$ . Asimismo, por ser  $\mathbb{H}$  un álgebra de división asociativa, aplicando la Proposición 1.9 se tiene que, para cada  $r \in \mathbb{H}$ , existe  $r^{-1} \in \mathbb{H}$  tal que  $rr^{-1} = r^{-1}r = 1$ . Se comprueba directamente que dicho elemento inverso viene dado por:

$$r^{-1} = \frac{\bar{r}}{\|r\|^2}.$$

<sup>9</sup>W. R. Hamilton. On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra. *Philos. Mag.* (1844-1850).

<sup>10</sup>R. P. Graves. *Life of Sir Rowan Hamilton*. Vol. II. Dublin, Hodges, Figgis, & co.; [etc., etc.], 1882. Chap. XXVIII. Extracto de una carta de Hamilton a P. G. Tait, fechada el 15 de octubre de 1858.

<sup>11</sup>Salvo que se indique lo contrario, cuando hablemos de ‘norma’ nos referiremos a la norma euclídea  $\|\cdot\|_2$ .



OBSERVACIÓN 1.21. En el caso en que  $\|r\| = 1$ , se tiene que  $r^{-1} = \bar{r}$ .

Nótese nuevamente que, mientras que el producto de números complejos es conmutativo, no ocurre así con el producto de cuaterniones. Como veremos —y probaremos— próximamente, esta pérdida de simetría en las operaciones no es casual, sino que se repite a medida que duplicamos la dimensión del álgebra. Así, según lo dicho, si duplicásemos nuevamente la dimensión para obtener un álgebra 8-dimensional deberíamos perder alguna otra propiedad; en efecto, eso es lo que ocurre: los octoniones no son ya álgebra asociativa, sino simplemente alternativa.

**1.1.2. Octoniones.** La historia detrás del descubrimiento de los octoniones es bastante menos conocida y, ciertamente, más triste para su legítimo descubridor, John T. Graves, amigo y compañero de Hamilton en el Trinity College de Dublín. Al día siguiente de su gran descubrimiento, Hamilton escribe a Graves para describirle sus preciados cuaterniones, a lo que Graves, dejando aparte las pertinentes felicitaciones por el hallazgo, responde más tarde manifestando su curiosidad por saber hasta dónde podría extenderse este procedimiento de crear nuevas estructuras añadiendo partes imaginarias adicionales; cabe citar a este respecto la siguiente frase de Graves: «If with your alchemy you can make three pounds of gold, why should you stop there?». Así pues, Graves comienza a trabajar en ello y, el 26 de diciembre de 1843, escribe a Hamilton anunciándole su descubrimiento de un álgebra 8-dimensional, acerca de la cual había probado, entre otras cosas, que se trataba de un álgebra de división normada. En enero del año siguiente, Graves le envía a Hamilton tres cartas explicándole detalladamente su descubrimiento, a lo que Hamilton responde ofreciéndose a dar a conocer el hallazgo de Graves; desafortunadamente para éste, Hamilton estaba tan embebido en su trabajo con los cuaterniones que aplazaba continuamente el cumplimiento de su promesa, aunque en julio de ese mismo año escribiría a Graves haciéndole ver que, si bien el producto de cuaterniones era asociativo, no ocurría lo mismo para los elementos de su álgebra 8-dimensional. Mientras todo esto tenía lugar, el joven Arthur Cayley, en Cambridge, reflexionaba sobre los cuaterniones recién descubiertos por Hamilton y, en 1845, como *post scriptum* de uno de sus artículos<sup>12</sup>, expuso una breve descripción de los octoniones. Graves trató de reclamar su prioridad en el descubrimiento de éstos con el apoyo de Hamilton, pero ya era demasiado tarde: los octoniones fueron llamados «números de Cayley».

Tras esta breve introducción histórica, en lo que sigue veremos dos formas diferentes de construir los octoniones<sup>13</sup>, que denotaremos mediante  $\mathbb{O}$ . La primera de ellas consiste en dar explícitamente una base de  $\mathbb{O}$  como espacio vectorial real y las reglas necesarias para multiplicar los elementos de dicha base, lo que equivale a dar su tabla de multiplicación. Como espacio vectorial real,  $\mathbb{O}$  tiene dimensión 8 y una base es la dada por  $\{1, e_1, e_2, \dots, e_7\}$ , donde los elementos  $e_i$ , con  $1 \leq i \leq 7$ , juegan un papel similar al que jugaban  $i$ ,  $j$  y  $k$  en el caso de los cuaterniones. Así, podemos definir  $\mathbb{O}$  como sigue:

$$\mathbb{O} := \left\{ a_0 + \sum_{i=1}^7 a_i e_i : a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 7 \right\}.$$

Para multiplicar dos octoniones basta con tener en cuenta la siguiente tabla, que muestra el resultado de multiplicar el elemento de la fila  $i$  por el elemento de la columna  $j$ :

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$-1$	$e_4$	$e_7$	$-e_2$	$e_6$	$-e_5$	$-e_3$
$e_2$	$-e_4$	$-1$	$e_5$	$e_1$	$-e_3$	$e_7$	$-e_6$
$e_3$	$-e_7$	$-e_5$	$-1$	$e_6$	$e_2$	$-e_4$	$e_1$
$e_4$	$e_2$	$-e_1$	$-e_6$	$-1$	$e_7$	$e_3$	$-e_5$
$e_5$	$-e_6$	$e_3$	$-e_2$	$-e_7$	$-1$	$e_1$	$e_4$
$e_6$	$e_5$	$-e_7$	$e_4$	$-e_3$	$-e_1$	$-1$	$e_2$
$e_7$	$e_3$	$e_6$	$-e_1$	$e_5$	$-e_4$	$-e_2$	$-1$

TABLA 1.1. Tabla de multiplicación de los octoniones.

<sup>12</sup>A. Cayley. On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions. *Philos. Mag.*, 26 (1845), 208–211.

<sup>13</sup>Estas no son las únicas formas de construir los octoniones; además de las dos mencionadas en este trabajo, en [Bae02] se expone su construcción por medio del plano de Fano —el plano proyectivo  $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_2)$ , formado por siete puntos y siete rectas— y también empleando álgebras de Clifford y espinores. Por razones de espacio, y dado que no es nuestro principal objetivo el realizar un tratamiento exhaustivo de los octoniones, remitimos al lector interesado en dichas construcciones al artículo citado.

Dado que quizá no sea muy práctico tener que recurrir constantemente a esta tabla para multiplicar octoniones, nótese que la información recogida en ella es equivalente a la dada por las siguientes reglas:

- $e_1 e_2 = e_4$ .
- $e_1, \dots, e_7$  son raíces cuadradas de  $-1$ , esto es,  $e_i^2 = -1$  para todo  $i \in \{1, \dots, 7\}$ .
- El producto de  $e_i$  y  $e_j$  es anticonmutativo si  $i \neq j$ , es decir,  $e_i e_j = -e_j e_i$ .
- Se verifican las dos identidades siguientes:

$$\begin{aligned} e_i e_j = e_k &\implies e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}, \\ e_i e_j = e_k &\implies e_{2i} e_{2j} = e_{2k}, \end{aligned}$$

para todo  $i, j, k \in \{1, \dots, 7\}$ .

Al igual que  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{O}$  es un álgebra de división normada. A partir de las reglas anteriores, es claro que no es conmutativa; tampoco es asociativa, como es fácil comprobar, sino simplemente alternativa, por lo que no es cuerpo. De forma similar a lo comentado en el caso de los cuaterniones, se tienen los isomorfismos triviales  $\mathbb{O} \cong \mathbb{H}^2 \cong \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$ .

La segunda construcción de los octoniones que veremos aquí no es exclusiva de éstos, sino que, partiendo de  $\mathbb{R}$ , permite construir  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{O}$  e infinitas álgebras más; además —y aquí es donde reside gran parte de la belleza de esta construcción—, la pérdida de simetría en las operaciones que hemos observado al duplicar la dimensión en cada nueva álgebra queda plenamente justificada con dicho procedimiento.

**1.1.3. La construcción de Cayley–Dickson.** Como decíamos, vamos a describir una construcción de las cuatro álgebras de división normadas  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  que explica por qué cada una de ellas se encuentra perfectamente encajada en la siguiente. Este procedimiento, que recibe el nombre de *construcción de Cayley–Dickson*, justifica, como veremos, la no conmutatividad de  $\mathbb{H}$  y la no asociatividad de  $\mathbb{O}$ . Como hemos mencionado, dicha construcción no se limita solamente a las cuatro álgebras de división normadas, sino que proporciona una sucesión infinita de álgebras, cada una de dimensión el doble que la anterior. Comencemos, pues, con algunas definiciones:

**DEFINICIÓN 1.22.** Una *\*-álgebra* es un álgebra  $A$  equipada con una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $*$ :  $A \rightarrow A$ , denominada *conjugación*, tal que

$$a^{**} = a, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad \forall a, b \in A.$$

**DEFINICIÓN 1.23.** Sea  $A$  una \*-álgebra. Se dice que  $A$  es *real* si  $a = a^*$  para todo  $a \in A$ .

**DEFINICIÓN 1.24.** Sea  $A$  una \*-álgebra. Se dice que  $A$  es *nicely normada*<sup>14</sup> si  $a + a^* \in \mathbb{R}$  y  $aa^* = a^*a > 0$  para todo  $a \in A \setminus \{0\}$ . En ese caso, para cada  $a \in A$  definimos sus partes real e imaginaria, respectivamente, como

$$\operatorname{Re}(a) = (a + a^*)/2 \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(a) = (a - a^*)/2,$$

y podemos definir una norma en  $A$  tal que

$$||a||^2 = aa^*.$$

**PROPOSICIÓN 1.25.** Sea  $A$  una \*-álgebra. Si  $A$  es nicely normada, entonces  $A$  posee inversos multiplicativos dados por

$$a^{-1} = \frac{a^*}{||a||^2},$$

para cada  $a \in A$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Es una mera comprobación. □

**PROPOSICIÓN 1.26.** Sea  $A$  una \*-álgebra. Si  $A$  es nicely normada y alternativa, entonces  $A$  es un álgebra de división normada.

<sup>14</sup>Dado que no hemos encontrado una traducción estándar para “nicely normed”, emplearemos la expresión inglesa.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que probar que  $\|ab\| = \|a\| \|b\|$  para todo  $a, b \in A$ . Sean, pues,  $a, b \in A$ , y consideremos la subálgebra  $S$  generada por  $\text{Im}(a)$  e  $\text{Im}(b)$ . Dado que  $\text{Re}(a) \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $\text{Re}(a) \in S$ , luego  $\text{Re}(a) + \text{Im}(a) = a \in S$  y  $\text{Re}(a) - \text{Im}(a) = a^* \in S$ . Razonando de forma análoga para  $b$ , se obtiene que  $a, b, a^*, b^* \in S$ . Por ser  $A$  alternativa, se tiene que  $S$  es asociativa, por lo que, teniendo en cuenta la expresión de la norma para un álgebra nicely normada,

$$\|ab\|^2 = (ab)(ab)^* = (ab)(b^*a^*) = a(bb^*)a = \|a\|^2\|b\|^2,$$

de donde se concluye que  $\|ab\| = \|a\| \|b\|$ , como queríamos probar.  $\square$

Una vez que hemos introducido los conceptos precedentes, podemos definir en qué consiste la construcción de Cayley–Dickson y demostrar algunas de sus propiedades más relevantes, que, como veremos, encuentran aplicación directa en las álgebras de división normadas  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  que ya nos son familiares.

DEFINICIÓN 1.27 (Construcción de Cayley–Dickson). Sea  $A$  una  $*$ -álgebra. Entonces,

$$A' = \{(a, b) : a, b \in A\}$$

es también una  $*$ -álgebra con las operaciones siguientes:<sup>15</sup>

$$(1.8) \quad (a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d),$$

$$(1.9) \quad \lambda(a, b) = (a, b)\lambda = (\lambda a, \lambda b) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(1.10) \quad (a, b)(c, d) = (ac - d^*b, da + bc^*),$$

$$(1.11) \quad (a, b)^* = (a^*, -b).$$

para cualesquiera  $(a, b), (c, d) \in A'$ . Este procedimiento, consistente en obtener una nueva  $*$ -álgebra a partir de una dada, recibe el nombre de *construcción de Cayley–Dickson*.

OBSERVACIÓN 1.28. Con las operaciones descritas en la Definición 1.27, es fácil comprobar que el elemento  $(1, 0) \in A'$  es la unidad de  $A'$ , pues  $(a, b)(1, 0) = (1, 0)(a, b) = (a, b)$  para todo  $(a, b) \in A'$ . De forma análoga a lo dicho en la Observación 1.3, consideraremos los números reales como elementos de  $A'$  por medio de la inclusión  $\lambda \mapsto \lambda(1, 0) = (\lambda, 0)$  para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

OBSERVACIÓN 1.29. Si en la Definición 1.27 tomamos  $A = \mathbb{R}$ , se tiene que  $A' = \mathbb{C}$  y las operaciones mostradas en (1.8), (1.10) y (1.11) son las bien conocidas de suma, multiplicación y conjugación de números complejos. Asimismo, si pensamos en un cuaternión como un par de números complejos, o en un octonión como un par de cuaterniones, las fórmulas mencionadas coinciden, exactamente, con la suma, multiplicación y conjugación de cuaterniones y octoniones, respectivamente.

PROPOSICIÓN 1.30. Sea  $A$  una  $*$ -álgebra, y sea  $A'$  la  $*$ -álgebra obtenida al aplicar la construcción de Cayley–Dickson sobre  $A$ . Se verifican las siguientes propiedades:

- (I)  $A'$  nunca es real.
- (II)  $A$  es real (y, por tanto, conmutativa) si y sólo si  $A'$  es conmutativa.
- (III)  $A$  es conmutativa y asociativa si y sólo si  $A'$  es asociativa.
- (IV)  $A$  es asociativa y nicely normada si y sólo si  $A'$  es alternativa y nicely normada.
- (V)  $A$  es nicely normada si y sólo si  $A'$  es nicely normada.

DEMOSTRACIÓN. Probemos cada una de las afirmaciones precedentes:

- (I) Sea  $(a, b) \in A'$ . A partir de la ecuación (1.11) es claro que  $(a, b)^* \neq (a, b)$  si  $b \neq 0$ , por lo que  $A'$  no puede ser nunca real.
- (II)  $\bullet \implies$ : Sean  $(a, b), (c, d) \in A'$ . Aplicando la ecuación (1.10) y teniendo en cuenta que  $A$  es real —y, por tanto, conmutativa—, se obtiene que

$$\begin{aligned} (a, b)(c, d) &= (ac - d^*b, da + bc^*) = (ac - db, da + bc), \\ (c, d)(a, b) &= (ca - b^*d, bc + da^*) = (ac - db, da + bc), \end{aligned}$$

por lo que  $A'$  es conmutativa.

<sup>15</sup>En el artículo [Bae02] se da otra expresión ligeramente diferente para el producto de elementos de  $A'$  dado en (1.10). Cabe señalar que estas variaciones en dicha fórmula son perfectamente correctas y las construcciones correspondientes generan estructuras idénticas salvo por el signo de las bases. En este trabajo hemos optado por la presentada aquí por ser más coherente con la expresión obtenida al realizar directamente el producto de cuaterniones; esta formulación aparece también en [KN69, Example 2.6].

- $\Leftarrow$  : Supongamos que  $A'$  es conmutativa y consideremos los elementos  $(a, 0), (0, 1) \in A'$ . Aplicando la ecuación (1.10) se tiene que

$$(a, 0)(0, 1) = (0, a), \quad (0, 1)(a, 0) = (0, a^*).$$

Dado que  $A'$  es conmutativa, se sigue que ha de ser  $a = a^*$ , de donde se concluye que  $A$  es real, como queríamos probar.

- (III) •  $\Rightarrow$  : Supongamos que  $A$  es conmutativa y asociativa. Sean  $(a, b), (c, d), (e, f) \in A'$ . Aplicando la ecuación (1.10) se tiene que

$$\begin{aligned} ((a, b)(c, d))(e, f) &= (ac - d^*b, da + bc^*)(e, f) \\ &= ((ac - d^*b)e - f^*(da + bc^*), f(ac - d^*b) + (da + bc^*)e^*) \\ &= (ace - d^*be - f^*da - f^*bc^*, fac - fd^*b + dae^* + bc^*e^*), \\ (a, b)((c, d)(e, f)) &= (a, b)(ce - f^*d, fc + de^*) \\ &= (a(ce - f^*d) - (fc + de^*)^*b, (fc + de^*)a + b(ce - f^*d)^*) \\ &= (ace - af^*d - c^*f^*b - ed^*b, fca + de^*a + be^*c^* - bd^*f). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis de que  $A$  es conmutativa, se llega a que  $((a, b)(c, d))(e, f) = (a, b)((c, d)(e, f))$ , con lo que  $A'$  es asociativa.

- $\Leftarrow$  : Supongamos que  $A'$  es asociativa. Sean  $a, b, c \in A$ , y consideremos los elementos  $(a, 0), (b, 0), (c, 0) \in A'$ . Aplicando la ecuación (1.10) se tiene, por un lado, que

$$\begin{aligned} (a, 0)((b, 0)(0, 1)) &= (a, 0)(0, b) = (0, ba), \\ ((a, 0)(b, 0))(0, 1) &= (ab, 0)(0, 1) = (0, ab). \end{aligned}$$

De la hipótesis inicial de que  $A'$  es asociativa se deduce que ha de ser  $ba = ab$ , de donde se concluye que  $A$  es conmutativa. Por otro lado, veamos que es también asociativa:

$$\begin{aligned} (a, 0)((b, 0)(c, 0)) &= (a, 0)(bc, 0) = (a(bc), 0), \\ ((a, 0)(b, 0))(c, 0) &= (ab, 0)(c, 0) = ((ab)c, 0). \end{aligned}$$

de donde, por ser  $A'$  asociativa, se deduce que ha de ser  $a(bc) = (ab)c$ , con lo que  $A$  es asociativa.

- (IV) •  $\Rightarrow$  : Supongamos que  $A$  es asociativa y nicely normada. Sean  $(a, b), (c, d) \in A'$ . Para ver que  $A'$  es alternativa, probemos que se verifican las relaciones primera y tercera del Teorema 1.13:

$$\begin{aligned} ((a, b)(a, b))(c, d) &= (a^2 - \|b\|^2, ba + ba^*)(c, d) \\ &= (a^2c - \|b\|^2c - d^*(ba) - d^*(ba^*), da^2 - d\|b\|^2 + (ba)c^* + (ba^*)c^*) \\ &= (a^2c - \|b\|^2c - d^*b(a + a^*), da^2 - d\|b\|^2 + b(a + a^*)c^*), \\ (a, b)((a, b)(c, d)) &= (a, b)(ac - d^*b, da + bc^*) \\ &= (a(ac) - a(d^*b) - (a^*d^*)b - (cb^*)b, (da)a + (bc^*)a + b(c^*a^*) - b(b^*d)) \\ &= (a^2c - (a + a^*)d^*b - c\|b\|^2, da^2 + bc^*(a + a^*) - \|b\|^2d), \\ ((c, d)(a, b))(a, b) &= (ca - b^*d, bc + da^*)(a, b) \\ &= ((ca)a - (b^*d)a - b^*(bc) - b^*(da^*), b(ca) - b(b^*d) + (bc)a^* + (da^*)a^*) \\ &= (ca^2 - b^*d(a + a^*) - \|b\|^2c, bc(a + a^*) - \|b\|^2d + d(a^*)^2), \\ (c, d)((a, b)(a, b)) &= (c, d)(a^2 - \|b\|^2, ba + ba^*) \\ &= (ca^2 - c\|b\|^2 - (a^*b^*)d - (ab^*)d, (ba)c + (ba^*)c + d(a^2)^* - d\|b\|^2) \\ &= (ca^2 - c\|b\|^2 - (a^* + a)b^*d, b(a + a^*)c + d(a^2)^* - d\|b\|^2), \end{aligned}$$

donde, en la tercera igualdad de cada una de las expresiones, hemos hecho uso de que  $A$  es asociativa y nicely normada. Finalmente, teniendo en cuenta que, por ser  $A$  nicely normada, tanto  $a + a^* = a^* + a$  como  $\|b\|^2$  son números reales, se concluye que  $((a, b)(a, b))(c, d) =$

$(a, b)((a, b)(c, d))$  y  $((c, d)(a, b))(a, b) = (c, d)((a, b)(a, b))$ , luego  $A'$  es alternativa. Veamos que es nicely normada:

$$(a, b) + (a, b)^* = (a, b) + (a^*, -b) = (a + a^*, 0) \in \mathbb{R},$$

ya que  $a + a^* \in \mathbb{R}$  por ser  $A$  nicely normada (véase Observación 1.28). Por otro lado,

$$(a, b)(a, b)^* = (a, b)(a^*, -b) = (aa^* + b^*b, -ba + ba) = (\|a\|^2 + \|b\|^2, 0) = (a, b)^*(a, b).$$

Dado que  $0 < \|a\|^2 + \|b\|^2 \in \mathbb{R}$ , se sigue de lo anterior que

$$0 < (a, b)(a, b)^* = (a, b)^*(a, b) \in \mathbb{R},$$

lo que concluye la prueba de que  $A'$  es nicely normada.

- $\Leftarrow$  : Supongamos que  $A'$  es alternativa y nicely normada. Vamos a probar, en primer lugar, que  $A$  es nicely normada. Sea  $a \in A$ , y consideremos el elemento  $(a, 0) \in A'$ . Se tiene que  $(a, 0) + (a^*, 0) = (a + a^*, 0)$ ; dado que  $A'$  es nicely normada, se sigue de lo anterior que  $(a + a^*, 0) \in \mathbb{R}$ , luego  $a + a^* \in \mathbb{R}$ . Por otro lado, tenemos que  $(a, 0)(a, 0)^* = (a, 0)(a^*, 0) = (aa^*, 0)$  y  $(a, 0)^*(a, 0) = (a^*a, 0)$ . Nuevamente, por ser  $A'$  nicely normada se tiene que  $0 < (aa^*, 0) = (a^*a, 0) \in \mathbb{R}$ , lo que implica que  $0 < aa^* = a^*a \in \mathbb{R}$ . Con todo lo anterior se concluye que  $A$  es nicely normada. Veamos ahora que  $A$  es asociativa. Sean  $a, b, c \in A$  y consideremos los elementos  $(a, b), (c, 0) \in A'$ . Por ser  $A'$  alternativa se tendrá que

$$(c, 0)((a, b)(a, b)) = ((c, 0)(a, b))(a, b),$$

de modo que

$$\begin{aligned} (c(aa) - c(b^*b), (ba)c + (ba^*)c) &= ((ca)a - b^*(bc), b(ca) + (bc)a^*) \\ \implies \begin{cases} c(aa) - c(b^*b) &= (ca)a - b^*(bc), \\ (ba)c + (ba^*)c &= b(ca) + (bc)a^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Si desarrollamos el término de la izquierda de la segunda igualdad aplicando que  $A$  es nicely normada y, por tanto,  $a + a^* \in \mathbb{R}$ , obtenemos que

$$(ba)c + (ba^*)c = (ba + ba^*)c = (b(a + a^*))c = (a + a^*)bc = bc(a + a^*) = (bc)a + (bc)a^*.$$

Sustituyendo esto arriba, llegamos a que

$$(bc)a + \cancel{(be)a^*} = b(ca) + \cancel{(be)a^*} \implies (bc)a = b(ca),$$

de donde se concluye que  $A$  es asociativa, como queríamos probar.

- (v) •  $\implies$  : Supongamos que  $A$  es nicely normada. Sea  $(a, b) \in A'$ . Entonces,

$$(a, b) + (a, b)^* = (a, b) + (a^*, -b) = (a + a^*, 0) \in \mathbb{R},$$

ya que  $a + a^* \in \mathbb{R}$  por ser  $A$  nicely normada. Por otro lado,

$$(a, b)(a, b)^* = (a, b)(a^*, -b) = (aa^* + b^*b, -ba + ba) = (\|a\|^2 + \|b\|^2, 0) = (a, b)^*(a, b) \in \mathbb{R},$$

pues  $\|a\|^2 + \|b\|^2 \in \mathbb{R}$ , luego queda probado que  $A'$  es nicely normada.

- $\Leftarrow$  : Esta implicación fue probada como parte de la implicación ( $\Leftarrow$ ) del punto anterior.  $\square$

OBSERVACIÓN 1.31. A partir de la Proposición 1.30, es claro que, si realizamos la construcción de Cayley–Dickson comenzando desde  $\mathbb{R}$ , se tiene la siguiente cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \text{ es una } * \text{-álgebra real, conmutativa, asociativa y nicely normada} &\implies \\ \mathbb{C} \text{ es una } * \text{-álgebra conmutativa, asociativa y nicely normada} &\implies \\ \mathbb{H} \text{ es una } * \text{-álgebra asociativa y nicely normada} &\implies \\ \mathbb{O} \text{ es una } * \text{-álgebra alternativa y nicely normada.} & \end{aligned}$$

Como puede intuirse, si continuáramos aplicando la construcción de Cayley–Dickson desde  $\mathbb{O}$  obtendríamos una nueva álgebra de dimensión 16; en el siguiente paso, la dimensión sería 32, y así sucesivamente. Así, comenzando la construcción de Cayley–Dickson desde  $\mathbb{R}$  podemos obtener una sucesión infinita de álgebras de dimensión  $2^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Tras los octoniones, la siguiente álgebra en esta sucesión serían los sedeniones, denotados como  $\mathbb{S}$ , de dimensión 16. De  $\mathbb{S}$  en adelante, es claro, a partir de la Proposición 1.30, que todas las álgebras de esta sucesión son álgebras nicely normadas; por la misma proposición, es también claro que no pueden ser ni reales, ni conmutativas, ni alternativas. De acuerdo a lo dicho, de la Proposición 1.25 se sigue que todas ellas tienen inversos multiplicativos. Sin embargo, no son álgebras de división, pues tienen divisores de cero. En el caso de  $\mathbb{S}$ , si consideramos la base dada por  $\{1, e_1, \dots, e_{15}\}$ , hay 84 conjuntos de la forma  $\{e_a, e_b, e_c, e_d\}$  tales que  $(e_a + e_b)(e_c + e_d) = 0$ .<sup>16</sup>

## 1.2. Las esferas y la proyección estereográfica

Como pronto comprobaremos, las esferas de diferentes dimensiones juegan un papel clave en este trabajo, por lo que es conveniente especificar la notación que vamos a utilizar para referirnos a ellas.

NOTACIÓN 1.32. Denotaremos mediante  $S^n(K, R)$  a la esfera de centro  $K$  y radio  $R$  contenida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$S^n(K, R) := \{P \in \mathbb{R}^{n+1} : \|KP\| = R, R \in \mathbb{R}, R \geq 0\}.$$

Si  $K$  es el origen  $O$ , si  $R = 1$ , o si se verifican ambas condiciones, la denotaremos, respectivamente, mediante  $S^n(R)$ ,  $S^n(K)$  y  $S^n$ . En este último caso, nos referiremos a ella simplemente como  $n$ -esfera o esfera estándar de  $\mathbb{R}^n$ .

OBSERVACIÓN 1.33. En términos de las álgebras de división normadas, se tiene que  $S^0$ ,  $S^1$ ,  $S^3$  y  $S^7$  son, respectivamente, los elementos de norma uno de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ .

Geoméricamente,  $S^n$  es el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  cuya distancia al origen es uno. Así, por ejemplo, la 0-esfera  $S^0$  es el conjunto  $\{-1, 1\}$ , la 1-esfera  $S^1$  es la circunferencia unidad y la 2-esfera  $S^2$  es la esfera usual tridimensional que a todos nos viene a la cabeza cuando escuchamos la palabra ‘esfera’. Es posible que aquéllos dotados de una visión geométrica privilegiada sean capaces incluso de imaginar la forma que podría tener la 3-esfera  $S^3$  contenida en el espacio euclídeo tetradimensional  $\mathbb{R}^4$ . Sin embargo, no todo está perdido para aquéllos de nosotros que no gozamos de esa capacidad, pues, afortunadamente, disponemos de una poderosa herramienta que nos permite visualizar  $S^3$ : la proyección estereográfica.

A pesar de que la proyección estereográfica ha sido estudiada en diferentes momentos a lo largo del Grado, no está de más recordarla para, así, tenerla presente en los diferentes puntos del trabajo en que recurramos a ella. Demos, pues, su definición para el caso general:

DEFINICIÓN 1.34. Se denomina *proyección estereográfica* a la aplicación siguiente:<sup>17</sup>

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \pi_N: S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left( \frac{x_2}{1-x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1-x_1} \right). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.35. En la Definición 1.34 hemos considerado la proyección estereográfica realizada desde el punto  $N = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; análogamente se puede definir la proyección realizada desde el punto  $S = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \pi_S: S^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left( \frac{x_2}{1+x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1+x_1} \right). \end{aligned}$$

La Figura 1.1 muestra la proyección estereográfica  $\pi_N$  en el caso de la esfera  $S^2$ :

<sup>16</sup>R. E. Cawagas. On the structure and zero divisors of the Cayley–Dickson sedenion algebra. *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.*, 24 (2004), 251–265.

<sup>17</sup>A pesar de que la proyección estereográfica suele realizarse, por lo general, desde los puntos  $(0, \dots, 0, 1)$  o  $(0, \dots, 0, -1)$ , en este caso hemos optado por esta definición por ser la que usaremos a lo largo del trabajo.

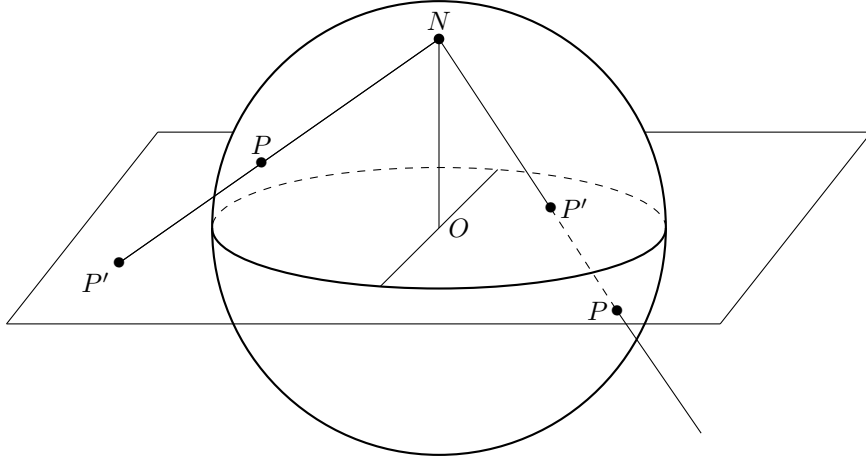


FIGURA 1.1. Proyección estereográfica de la esfera  $S^2$  sobre el plano ecuatorial, donde  $P \in S^2$  y  $P'$  es su proyección en el plano  $\mathbb{R}^2$ .

OBSERVACIÓN 1.36. Las aplicaciones dadas en la Definición 1.34 y la Observación 1.35 son biyectivas y sus inversas vienen dadas por

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \pi_N^{-1}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left( \frac{-1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{2x_1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \right), \end{aligned}$$

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \pi_S^{-1}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \left( \frac{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{2x_1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \right). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.37. La proyección estereográfica es conforme, es decir, conserva los ángulos. Además, la siguiente proposición muestra un resultado que nos será de utilidad a la hora de estudiar las fibras de la fibración de Hopf.

TEOREMA 1.38. Sea  $\pi: S^n \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección estereográfica, y sea  $C$  una circunferencia en  $S^n$ . Si  $P \notin C$ , entonces  $\pi(C)$  es una circunferencia en  $\mathbb{R}^n$ . En caso contrario,  $\pi(C)$  es una recta. Asimismo, si  $C$  es una circunferencia o una recta en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\pi^{-1}(C)$  es una circunferencia en  $S^n$ .

DEMOSTRACIÓN. [Ber87, Chapter 18] □

### 1.3. Topología diferencial

A lo largo de este trabajo haremos referencia frecuentemente a diferentes conceptos relacionados con las variedades diferenciables, como los campos vectoriales o las estructuras complejas y casi complejas, por lo que es conveniente realizar un pequeño repaso de estas nociones. Cabe señalar que el objetivo de esta sección no es realizar una exposición extensa y minuciosa sobre variedades diferenciables, sino solamente ofrecer una panorámica sencilla que nos permita hacer referencia a dichos conceptos posteriormente. Así pues, asumimos que el lector está, en mayor o menor medida, familiarizado con ellos; en caso de que no sea así, o se desee información más detallada sobre los temas tratados en esta sección, remitimos al libro [BC70] para un tratamiento más completo.

#### 1.3.1. Variedades diferenciables. Comencemos recordando algunas definiciones sencillas:<sup>18</sup>

DEFINICIÓN 1.39. Sea  $M$  un conjunto no vacío.

- (i) Una aplicación  $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  inyectiva y tal que su imagen  $x(U)$  es un subespacio abierto de  $\mathbb{R}^n$  se denomina *carta*. La imagen de cada elemento  $P \in M$ ,  $x(P) = (x_1(P), \dots, x_n(P)) \in \mathbb{R}^n$ , se denomina conjunto de *coordenadas* de  $P$  respecto de la carta  $x$ . A  $U$  se le llama *dominio* de la carta.

<sup>18</sup>Salvo que se indique lo contrario, en esta subsección seguiremos el libro de F. Brickell y R. S. Clark: *Differentiable manifolds: an introduction*. Van Nostrand, London, 1970.

- (II) Se denomina *atlas* sobre  $M$  a una colección  $\mathcal{A}$  de cartas de  $M$  sobre  $\mathbb{R}^n$  cuyos dominios recubren todo  $M$ .
- (III) Se llama *atlas*  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $M$  a un atlas  $\mathcal{A}$  sobre  $M$  tal que, para cualesquiera dos cartas  $x, y \in \mathcal{A}$  de  $M$  cuyos respectivos dominios  $U, V$  tengan intersección no vacía, se verifica que  $x(U \cap V), y(U \cap V)$  son abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y la composición  $y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ , denominada *cambio de carta* o *cambio de coordenadas*, es un difeomorfismo  $\mathcal{C}^\infty$ .
- (IV) Se dice que dos atlas  $\mathcal{C}^\infty$   $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  sobre  $M$  son *equivalentes* si su unión  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  es también un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $M$ .
- (V) Se dice que un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $M$  es un *atlas maximal* o *atlas completo* si no puede incluirse en ningún otro atlas  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $M$ .

DEFINICIÓN 1.40 (Variedad diferenciable). Una *variedad diferenciable* es un conjunto  $M$  dotado de un atlas  $\mathcal{C}^\infty$  maximal. Se llama *dimensión* de la variedad a la dimensión  $n$  del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  donde toman valores las cartas.

PROPOSICIÓN 1.41. *Todo atlas  $\mathcal{C}^\infty$  está contenido en un único atlas maximal.*

OBSERVACIÓN 1.42. La Proposición 1.41 implica que, para dotar a un conjunto  $M$  de estructura de variedad diferenciable, basta con dar un atlas  $\mathcal{C}^\infty$   $\mathcal{A}$  sobre  $M$ , pues la estructura diferenciable será la determinada por el único atlas maximal que contiene a  $\mathcal{A}$ .

A partir de la Definición 1.40 cabe preguntarse si, dado un conjunto  $M$  que admita estructura de variedad diferenciable, dicha estructura es única. La respuesta, en general, es que no. A este respecto, consideremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.43. Dos estructuras diferenciables  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  sobre una variedad  $M$  se dicen *equivalentes* si existe un difeomorfismo  $f: (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{A}')$ .

OBSERVACIÓN 1.44. Nótese que, a partir de la Definición 1.40, puede probarse que el conjunto  $M$  estará dotado de estructura de espacio topológico sin más que considerar como base de la topología la colección de dominios de carta del atlas maximal de  $M$ . Dado que no es nuestro objetivo realizar una exposición exhaustiva de la topología de las variedades diferenciables, nos limitaremos a señalar que, de ahora en adelante, todas las variedades diferenciables serán Hausdorff y verificarán el II axioma de numerabilidad (II.A.N.)<sup>19</sup>

El producto de variedades es también variedad. En particular, se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 1.45. *Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables de dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente. Entonces,  $M \times N$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m + n$ .*

La definición de variedad diferenciable que hemos ofrecido aquí es la de variedad diferenciable *abstracta*. Se pueden definir también variedades *inmersas* o *sumergidas* en  $\mathbb{R}^n$  de forma similar a lo acostumbrado en el caso de las superficies de  $\mathbb{R}^3$  ([GR99]):

DEFINICIÓN 1.46 (Variedad inmersa). Un subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  se llama *variedad diferenciable inmersa* si existe algún  $m \leq n$  tal que, para cada  $P \in M$ , existen un entorno abierto  $U$  de  $P$  en  $M$  y un difeomorfismo  $f: U \rightarrow W$  en algún abierto  $W \subset \mathbb{R}^m$ .

Se puede probar de forma sencilla que toda variedad diferenciable inmersa es una variedad diferenciable abstracta (véase [GR99, Observación 5.3, Capítulo I]). De hecho, existe un recíproco para este resultado dado por el teorema de inmersión de Whitney, demostrado por Hassler Whitney<sup>20</sup> en 1936:

TEOREMA 1.47 (Whitney). *Toda variedad diferenciable de dimensión  $n$  admite un embedding regular en  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

OBSERVACIÓN 1.48. En 1944, el mismo Whitney<sup>21</sup> probó que el resultado anterior sigue siendo válido cambiando  $2n + 1$  por  $2n$ . Esta cota, no obstante, ya no se puede mejorar más: la botella de Klein,

<sup>19</sup>Un espacio topológico  $(M, \mathcal{T})$  verifica el II.A.N si la topología  $\mathcal{T}$  admite una base numerable.

<sup>20</sup>H. Whitney. Differentiable manifolds. *Ann. of Math.* (2), 37 (1936), 645–680.

<sup>21</sup>H. Whitney. The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space. *Ann. of Math.* (2), 45 (1944), n.º 3, 220–246.



por ejemplo, no admite un embedding en  $\mathbb{R}^3$ .<sup>22</sup> Sin embargo, existen casos particulares que mejoran con mucho la cota dada por Whitney: en el Lema 3.30 probaremos que el producto de esferas  $\prod_{i=1}^k S^{n_i}$  admite un embedding regular en un espacio euclídeo de dimensión  $1 + \sum_{i=1}^k n_i$ , un resultado bonito y ciertamente sorprendente si lo comparamos con el teorema precedente, pues es sólo una dimensión más que la dimensión de la variedad.

**1.3.2. Campos vectoriales.** Recordemos ahora algunos conceptos necesarios para introducir la noción de campo vectorial.

**PROPOSICIÓN 1.49.** Sea  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $k \geq 1$  y sea  $M$  una variedad diferenciable. Sea  $U \subseteq M$  un abierto. El conjunto  $\mathcal{C}^k(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es } k \text{ veces diferenciable con derivada } k\text{-ésima continua}\}$  es un anillo con las operaciones habituales de suma y producto de funciones.

**DEFINICIÓN 1.50.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $x: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  una carta. Se llama *derivada parcial*  $\partial/\partial x_i$  al operador

$$\frac{\partial}{\partial x_i}: \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

definido por  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f)(P) = \left(\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial t_i}\right)$  para cada  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ , siendo  $(t_1, \dots, t_n)$  las coordenadas en  $\mathbb{R}^n$  y  $P \in U$ .

**DEFINICIÓN 1.51 (Espacio tangente).** Se denomina *espacio tangente*  $T_P M$  de la variedad  $M$  en el punto  $P$  al espacio vectorial real de dimensión  $n$  que tiene como base las derivadas parciales en el punto  $P$ . Sus elementos se llaman *vectores tangentes*.

**DEFINICIÓN 1.52 (Fibrado tangente).** Se denomina *fibrado tangente* de una variedad diferenciable  $M$  al conjunto  $TM = \bigcup_{P \in M} T_P M$  de vectores tangentes a la variedad.

**OBSERVACIÓN 1.53.** El fibrado tangente  $TM$  tiene también estructura de variedad diferenciable, y su dimensión es el doble de la de  $M$ . Además, como variedad es siempre orientable. De modo natural se establece la proyección  $\pi: TM \rightarrow M$ , que a cada vector tangente le hace corresponder el punto en el que es tangente.

Lo dicho hasta ahora nos permite dar la siguiente definición de campo vectorial:

**DEFINICIÓN 1.54 (Campo vectorial).** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $TM$  su fibrado tangente. Un *campo vectorial*  $\mathbf{X}$  sobre  $M$  es una aplicación  $\mathbf{X}: M \rightarrow TM$  dada por  $P \mapsto (P, \mathbf{X}_P)$  para cada  $P \in M$ . El conjunto de campos vectoriales sobre una variedad  $M$  se denota por  $\mathfrak{X}(M)$  y está dotado de forma natural de las dos operaciones siguientes:

- (I)  $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})_P = \mathbf{X}_P + \mathbf{Y}_P, \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M), \forall P \in M$ .
- (II)  $(f\mathbf{X})_P = f(P)\mathbf{X}_P, \forall \mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

**OBSERVACIÓN 1.55.** Un campo vectorial  $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$  admite en cada carta  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una expresión única como  $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{X}^i$ , donde  $\mathbf{X}^i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Además, se tiene que, dado  $P \in U \subset M$ ,  $\mathbf{X}_P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot \mathbf{X}_P^i$  es un vector tangente. Nótese, pues, que un campo vectorial no es más que una colección diferenciable de vectores tangentes en los puntos de una variedad ([GR99]).

**OBSERVACIÓN 1.56.** El conjunto  $\mathfrak{X}(M)$  de campos vectoriales sobre una variedad  $M$  es un módulo sobre el anillo  $\mathcal{C}^\infty(M)$  de funciones de la variedad y es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre  $\mathbb{R}$ .

**OBSERVACIÓN 1.57.** Es posible dar una definición alternativa de campo vectorial como una aplicación  $\mathbf{X}: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  que verifica las siguientes propiedades:

- Es  $\mathbb{R}$ -lineal:  $\mathbf{X}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{X}(f) + \beta \mathbf{X}(g), \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- Verifica la ley de Leibniz:  $\mathbf{X}(fg) = \mathbf{X}(f)g + f\mathbf{X}(g), \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

**OBSERVACIÓN 1.58.** Denominaremos campo tensorial de tipo  $(1, 1)$  a toda aplicación  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal del módulo de campos vectoriales  $\mathfrak{X}(M)$  en sí mismo.

<sup>22</sup>De hecho, puede probarse que si  $M$  es una variedad compacta no orientable de dimensión  $n - 1$ , entonces  $M$  no admite un embedding en  $S^n$  y, por tanto, tampoco en  $\mathbb{R}^n$  ([Mas80, p. 223, Exercise 6.2]).

OBSERVACIÓN 1.59. En el conjunto de campo vectoriales  $\mathfrak{X}(M)$  se puede definir una operación

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\longmapsto [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \end{aligned}$$

llamada *corchete de Lie de campos vectoriales*, dada por  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$  para toda función  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Para finalizar esta subsección, recordemos la definición de curva integral de un campo vectorial:

DEFINICIÓN 1.60 (Curva integral). Una *curva integral* u *órbita* de un campo vectorial  $\mathbf{X}$  es una curva  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$  tal que  $\gamma'(t) = \mathbf{X}(\gamma(t))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

OBSERVACIÓN 1.61. Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, por cada punto pasa una única curva integral maximal.

**1.3.3. Estructuras complejas y casi complejas.** En la Definición 1.39 hemos introducido los conceptos necesarios para dotar a un conjunto de estructura de variedad diferenciable *real*. Sin embargo, si modificamos ligeramente dicha definición de forma que las cartas no tomen valores en  $\mathbb{R}^n$ , sino en  $\mathbb{C}^n$ , y exigimos que los cambios de carta sean holomorfismos, obtenemos la definición de variedad diferenciable *compleja* u *holomorfa*. No obstante, existe otra forma de dotar a una variedad real de estructura de variedad compleja —o, en su defecto, casi compleja, como veremos—, pero para ello necesitamos introducir las nociones de ‘estructura compleja’ y ‘estructura casi compleja’. Comencemos, pues, viendo cómo podemos dotar a un espacio vectorial real de estructura de espacio vectorial complejo.<sup>23</sup>

DEFINICIÓN 1.62 (Estructura compleja). Sea  $V$  un espacio vectorial real. Una *estructura compleja* sobre  $V$  es un endomorfismo lineal  $J$  de  $V$  tal que  $J^2 = -Id_V$ .

OBSERVACIÓN 1.63. La Definición 1.62 nos conduce de forma natural a las siguientes observaciones:

- (I) Un espacio vectorial real  $V$  equipado con una estructura compleja  $J$  puede ser dotado de estructura de espacio vectorial complejo definiendo la multiplicación por elementos de  $\mathbb{C}$  como sigue:

$$(a + ib)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + bJ(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Es claro que la dimensión real  $m$  de  $V$  ha de ser par, y, así, la dimensión compleja de  $V$  será  $m/2$ .

- (II) Por otro lado, si  $V$  es un espacio vectorial complejo de dimensión  $n$ , una estructura compleja de  $V$ , considerado como espacio vectorial real de dimensión  $2n$ , es la determinada por el endomorfismo lineal de  $V$  definido por

$$J(\mathbf{v}) = i\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

OBSERVACIÓN 1.64. De acuerdo con el punto (II) de la Observación 1.63, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$  admite una estructura compleja inducida por la estructura de espacio vectorial complejo de  $\mathbb{C}^n$ : todo elemento  $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$  puede considerarse como un elemento de  $\mathbb{C}^n$  mediante el isomorfismo dado por  $(x_1, \dots, x_{2n}) \cong (x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n})$ ; es claro, entonces, que

$$\begin{aligned} i\mathbf{v} &= i(x_1, \dots, x_{2n}) = i(x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}) = (-x_2 + ix_1, \dots, -x_{2n} + ix_{2n-1}) \\ &= (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}). \end{aligned}$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que  $i(\lambda\mathbf{v}) = (i\lambda)\mathbf{v} = (\lambda i)\mathbf{v} = \lambda(i\mathbf{v})$  para todo escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se tiene que la aplicación  $J: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  definida como  $J(\mathbf{v}) = i\mathbf{v}$  es un endomorfismo lineal de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Dado que  $i^2 = -1$ ,  $J^2 = -Id_{\mathbb{R}^{2n}}$ , luego  $J$  es una estructura compleja en  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Nótese que, dada una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$ , el espacio tangente  $T_P M$  en cada punto  $P \in M$  de la variedad es un espacio vectorial de dimensión  $n$ , como ya hemos mencionado, por lo que los conceptos que hemos expuesto anteriormente para el caso de un espacio vectorial  $V$  cualquiera pueden aplicarse de forma análoga a  $T_P M$ . Esto nos conduce directamente a la siguiente definición:

<sup>23</sup>La referencia para esta subsección es el Capítulo IX del libro de S. Kobayashi y K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*. Vol. II. Interscience Publishers, 1969.

DEFINICIÓN 1.65 (Estructura casi compleja, variedad casi compleja). Sea  $M$  una variedad diferenciable. Diremos que  $J$  es una *estructura casi compleja* sobre  $M$  si es una familia  $J = \{J_P: T_P M \rightarrow T_P M\}$  de estructuras complejas en cada espacio tangente de  $M$  que varía diferenciablemente; esto es,  $J$  es un campo tensorial de tipo  $(1, 1)$  sobre  $M$  tal que  $J \circ J = -Id$ . Una variedad equipada con una estructura casi compleja se denomina *variedad casi compleja*.

OBSERVACIÓN 1.66. A partir de las álgebras de división normadas  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$  y  $\mathbb{O} \cong \mathbb{C}^4$  se pueden definir diferentes estructuras casi complejas sobre  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^8$ , respectivamente. Así, en el caso de  $\mathbb{R}^2$  tendremos la estructura casi compleja  $J$  dada por

$$(1.16) \quad J(v) = iv, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Análogamente, en el caso de  $\mathbb{R}^4$  la multiplicación por  $i$ ,  $j$  y  $k$  determina tres estructuras casi complejas dadas por

$$(1.17) \quad J_1(v) = iv,$$

$$(1.18) \quad J_2(v) = jv,$$

$$(1.19) \quad J_3(v) = kv.$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^4$ . Finalmente, en el caso de  $\mathbb{R}^8$  tenemos siete estructuras casi complejas asociadas a la multiplicación por cada una de las unidades imaginarias  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq 7$ :

$$(1.20) \quad J_i(v) = e_i v, \quad \forall i, 1 \leq i \leq 7, \quad \forall v \in \mathbb{R}^8.$$

Toda variedad compleja es casi compleja, pues se puede definir una estructura casi compleja en la variedad a partir de la de  $\mathbb{C}^n$  por medio de las cartas; en este caso diremos que la estructura casi compleja es inducida por la estructura compleja de la variedad. El recíproco de lo anterior no es cierto en general: si bien cualquier variedad casi compleja es localmente una variedad compleja, no tiene por qué serlo globalmente. En el caso de que una variedad  $M$  equipada con una estructura casi compleja admita una estructura de variedad compleja compatible con aquélla, diremos que dicha estructura casi compleja es *holomorfa*. Además, en ese caso la estructura de variedad compleja asociada es única. Consideremos ahora la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.67. Sea  $M$  una variedad diferenciable, y sea  $J$  una estructura casi compleja sobre  $M$ . Se define la *torsión* de  $J$  como la aplicación  $N_J: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por<sup>24</sup>

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

En 1957, August Newlander y Louis Nirenberg<sup>25</sup> probaron un resultado de gran profundidad que nos permite determinar cuándo una estructura casi compleja es holomorfa:

TEOREMA 1.68 (Newlander-Nirenberg, [NN57]). *Una estructura casi compleja es holomorfa si y sólo si no tiene torsión, esto es,  $N_J \equiv 0$ .*

Para finalizar esta breve exposición de estructuras complejas y casi complejas, consideremos el siguiente resultado, donde los conceptos introducidos en esta subsección encuentran una curiosa aplicación:

PROPOSICIÓN 1.69. *Toda esfera de dimensión impar admite un campo sin ceros; esto es, para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $X \in \mathfrak{X}(S^{2n+1})$  tal que  $X_P \neq 0$  para todo  $P \in S^{2n+1}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $n = (x_1, \dots, x_{2n+2}) \in \mathbb{R}^{2n+2}$  el vector normal a la esfera  $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$  en un punto cualquiera  $P = (x_1, \dots, x_{2n+2}) \in S^{2n+1}$ . Dado que  $2n+2$  es par,  $\mathbb{R}^{2n+2}$  es un espacio vectorial de dimensión real par; por tanto, se tiene que  $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ , con lo que podemos expresar el vector  $n \in \mathbb{C}^{n+1}$  como  $n = (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4, \dots, x_{2n+1} + ix_{2n+2}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Haciendo uso de la estructura casi compleja de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  dada por  $J(v) = iv$  podemos construir un campo vectorial  $X$ , definido como

$$X = J(n) = in = (-x_2 + ix_1, -x_4 + ix_3, \dots, -x_{2n+2} + ix_{2n+1}) \cong (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n+2}, x_{2n+1}).$$

Es claro que  $X \cdot n = 0$ , luego  $X$  es un campo tangente a la esfera, esto es,  $X \in \mathfrak{X}(S^{2n+1})$ . Además, dado que  $X$  solamente se anula en el punto  $(0, \dots, 0) \notin S^{2n+1}$ , queda probado que  $X$  es un campo sin ceros, lo que termina la demostración.  $\square$

<sup>24</sup>Esta expresión no es más que el tensor de Nijenhuis  $N_F$  de un campo tensorial  $F$  de tipo  $(1, 1)$  aplicado al caso particular en que  $F$  es una estructura casi compleja.

<sup>25</sup>A. Newlander y L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math.* (2), 65 (1957), n.º 3, 391–404.

OBSERVACIÓN 1.70. Las esferas de dimensión par no admiten campos sin ceros. La demostración requeriría utilizar el teorema de Poincaré–Hopf, que escapa de los propósitos de este trabajo. Dicho teorema establece que la suma de los índices de los ceros aislados de un campo vectorial sobre una variedad compacta es igual a la característica de Euler de la variedad. Las esferas de dimensión par tienen característica dos y, por tanto, no pueden admitir campos sin ceros. Sin embargo, las de dimensión impar tienen característica cero, por lo que el teorema de Poincaré–Hopf no supone obstrucción a la existencia de campos sin ceros; de hecho, acabamos de probar su existencia.

#### 1.4. Geometría proyectiva

En el Capítulo 2 veremos diferentes formas de construir la fibración de Hopf clásica de  $S^3$  a  $S^2$  con fibra  $S^1$ ; una de estas construcciones se llevará a cabo utilizando geometría proyectiva, la cual, además, nos permitirá extender dicha construcción a esferas de otras dimensiones de forma sencilla. Por tanto, creemos conveniente recordar algunos de los conceptos básicos de ésta; en particular, el de recta proyectiva y espacio proyectivo sobre cada una de las álgebras de división normadas. Así pues, en esta sección  $\mathbb{K}$  denotará una de las cuatro álgebras de división normadas. Comencemos por algunas definiciones:<sup>26</sup>

DEFINICIÓN 1.71. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ . Definimos en  $V \setminus \{\mathbf{0}\}$  la siguiente relación:

$$(1.21) \quad \mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}.$$

PROPOSICIÓN 1.72. La relación  $\sim$  dada en (1.21) es de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN. Es una mera comprobación de las propiedades. □

OBSERVACIÓN 1.73. Notemos que, debido a la no conmutatividad del producto de cuaterniones, en el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  es necesario elegir una multiplicación por defecto a izquierda o a derecha a la hora de definir la relación de equivalencia (1.21). En este trabajo hemos escogido la multiplicación por la izquierda.

DEFINICIÓN 1.74. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ . Llamaremos *espacio proyectivo* asociado al espacio vectorial  $V$  al conjunto cociente

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{\mathbf{0}\} / \sim.$$

Los elementos de  $\mathbb{P}(V)$  se denominan puntos del espacio proyectivo y son los conjuntos de vectores

$$[\mathbf{v}] = \{\lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \quad \forall \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

OBSERVACIÓN 1.75. El espacio proyectivo es el conjunto de rectas vectoriales de  $V$ : si al conjunto  $[\mathbf{v}]$  de vectores que forman un punto proyectivo le añadimos el vector  $\mathbf{0}$ , tenemos la recta vectorial de  $V$  generada por  $\mathbf{v}$ .

DEFINICIÓN 1.76. Se llama *dimensión* del espacio proyectivo a  $\dim(\mathbb{P}(V)) = \dim(V) - 1$ , donde  $\dim(V)$  denota la dimensión de  $V$  como espacio vectorial.

OBSERVACIÓN 1.77. Con la definición anterior, si llamamos  $n = \dim(\mathbb{P}(V))$ , diremos que  $\mathbb{P}(V)$  es una recta proyectiva si  $n = 1$ , un plano proyectivo si  $n = 2$ , y un espacio proyectivo de dimensión  $n$  en el resto de casos.

OBSERVACIÓN 1.78. En el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ , no existe el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n(\mathbb{O})$  para  $n > 2$  ([CS03, Chapter 12])

NOTACIÓN 1.79. En el caso en que  $V = \mathbb{K}^{n+1}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , denotaremos el espacio proyectivo asociado a  $V$  como  $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ . Así, por ejemplo, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  u  $\mathbb{O}$ , las rectas proyectivas  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$  sobre  $\mathbb{K}$  serán denotadas, respectivamente, mediante  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{P}_1(\mathbb{H})$  y  $\mathbb{P}_1(\mathbb{O})$ . El punto  $[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$  correspondiente a un vector  $\mathbf{v} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$  se denotará por  $[x_0 : \dots : x_n]$ , significando con ello que las componentes  $x_i$  están determinadas salvo proporcionalidad.

OBSERVACIÓN 1.80. El espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  puede construirse identificando puntos antipodales sobre la esfera  $S^n$ . Así, se tiene que  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \cong S^n / \mathbb{Z}_2$ .

<sup>26</sup>La referencia para esta sección es el libro de J. M. Rodríguez-Sanjurjo y J. M. Ruiz Sancho: *Geometría Proyectiva*. Addison-Wesley, 1998.

Veamos ahora cómo son las rectas proyectivas sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K} \neq \mathbb{O}$ . Éstas vendrán dadas por:

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \{[\mathbf{v}] : \mathbf{v} = (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2\},$$

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \{[\mathbf{v}] : \mathbf{v} = (z_1, z_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}^2\},$$

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{H}) = \{[\mathbf{v}] : \mathbf{v} = (r_1, r_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{H}^2\}.$$

El caso  $\mathbb{K} = \mathbb{O}$  es un poco más delicado debido a la no asociatividad de los octoniones. En [Bae02] puede encontrarse una descripción de la construcción de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{O})$ , además de otros interesantes aspectos relativos a la geometría proyectiva de los octoniones. Las rectas proyectivas  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  pueden ser identificadas con  $\mathbb{K}$  sin más que añadir a éste el punto del infinito. Dado que las coordenadas proyectivas están determinadas salvo proporcionalidad, tenemos que el subconjunto de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  dado por

$$\{[1 : x] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{K}\}$$

es  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  salvo un punto, el *punto del infinito*, que podemos identificar con el punto  $[0 : 1] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ . Así, tenemos que  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ . Asimismo, a partir de la proyección estereográfica podemos identificar  $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$  con  $S^1$ ,  $S^2$ ,  $S^4$  y  $S^8$  en los casos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  y  $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ , respectivamente; estas esferas son las compactificaciones por un punto de  $\mathbb{K}$  en cada uno de los cuatro casos mencionados. En el caso particular en que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , se tiene  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \cong S^2$ , de forma que podemos ver la recta compleja como si se encontrase “envuelta” alrededor de la esfera; así,  $S^2$  es la denominada *esfera de Riemann*, que mostramos en la Figura 1.2.

En la recta proyectiva compleja  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  tenemos, además, el conjunto de automorfismos dados por las llamadas *transformaciones de Möbius*, que es grupo con la composición. Estos automorfismos son de la forma

$$(1.22) \quad \begin{array}{ccc} T: \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \\ z & \longmapsto & \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \end{array},$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  son tales que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Si  $\gamma \neq 0$ , basta tomar  $T(-\delta/\gamma) = \infty$  y  $T(\infty) = \alpha/\gamma$ ; en el caso  $\gamma = 0$ , se toma  $T(\infty) = \infty$ .

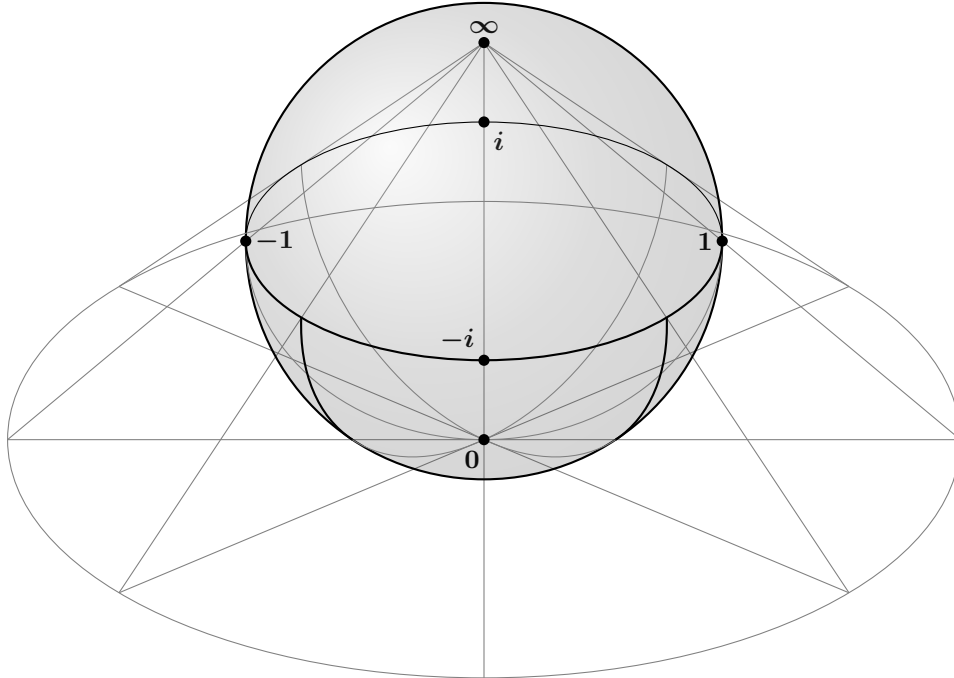


FIGURA 1.2. La esfera de Riemann, que puede identificarse con  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . En este caso particular, mostramos la proyección realizada desde el polo norte de la esfera sobre el plano tangente al polo sur.

### 1.5. Número de enlace de curvas cerradas en $\mathbb{R}^3$

Como veremos —y probaremos— en el Capítulo 2, las fibras de la fibración de Hopf son circunferencias  $S^1$  sobre la esfera  $S^3$ , caracterizadas por la curiosa propiedad de estar enlazadas dos a dos. Así, con el objetivo de poder calcular cuando sea pertinente cómo son esos enlaces, finalizaremos este primer capítulo describiendo muy brevemente algunos conceptos relacionados con los enlaces de curvas cerradas en  $\mathbb{R}^3$ .<sup>27</sup> Nótese que, aunque el número de enlace puede definirse para dos subvariedades compactas orientadas  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  utilizando teoría del grado<sup>28</sup>, dado que en este trabajo solamente lo calcularemos en el caso de circunferencias enlazadas en  $\mathbb{R}^3$ , la definición que aquí daremos es mucho más sencilla y también más práctica, pues se basa únicamente en cómo se cruzan las curvas orientadas en el espacio. Para ello, necesitamos un convenio que nos permita asignar un número a cada tipo de cruce. Sean, pues,  $M$  y  $N$  dos curvas cerradas orientadas disjuntas en  $\mathbb{R}^3$ , y denotemos mediante  $M \cap N$  el conjunto de cruces de  $M$  y  $N$ . Para cada  $p \in M \cap N$ , denotamos mediante  $\varepsilon(p)$  el signo del cruce, de acuerdo con la siguiente figura:

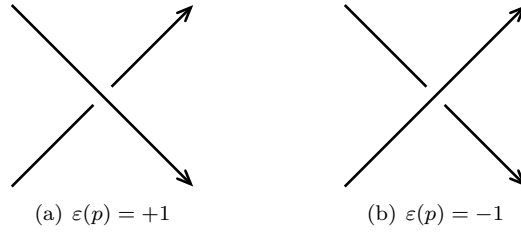


FIGURA 1.3. Convenio que nos permite calcular el número de enlace de dos curvas cerradas orientadas en  $\mathbb{R}^3$  dependiendo de cómo se crucen.

Con lo anterior, podemos definir ya el número de enlace de  $M$  y  $N$  como sigue:

DEFINICIÓN 1.81 (Número de enlace). Sean  $M, N \subset \mathbb{R}^3$  dos curvas cerradas orientadas tales que  $M \cap N = \emptyset$ . Se define el *número de enlace* de  $M$  y  $N$  como

$$\text{Lk}(M, N) = \frac{1}{2} \sum_{p \in M \cap N} \varepsilon(p).$$

DEFINICIÓN 1.82. Se dice que dos curvas  $M$  y  $N$  forman un enlace trivial si  $\text{Lk}(M, N) = 0$ .

OBSERVACIÓN 1.83. Dadas dos curvas cerradas orientadas  $M$  y  $N$ , es fácil comprobar que si revertimos la orientación de una de ellas el número de enlace cambia de signo. Sin embargo, el valor absoluto de éste es independiente de la orientación de las curvas que componen el enlace.

OBSERVACIÓN 1.84. El número de enlace puede utilizarse para distinguir enlaces: dos enlaces con números de enlace distintos han de ser necesariamente diferentes.

Finalmente, enunciemos un resultado que será de gran utilidad para probar que las fibras de la fibración de Hopf están enlazadas:

PROPOSICIÓN 1.85. *El número de enlace es un invariante topológico, esto es, se conserva bajo homeomorfismos.*

En los dos capítulos siguientes veremos cómo los conceptos expuestos en éste encuentran aplicación y prueban ser de gran utilidad. Comencemos, pues, con el estudio del primero de los temas en los que las álgebras de división normadas juegan un papel destacado: la fibración de Hopf.

<sup>27</sup>Las referencias para esta sección son [Ada94] y [Rol76].

<sup>28</sup>Véase, por ejemplo, [Hir76].

## La fibración de Hopf

INTRODUCCIÓN. En 1931, el matemático alemán Heinz Hopf<sup>1</sup> construyó por primera vez una aplicación  $S^3 \rightarrow S^2$  que no era homotópicamente equivalente a una aplicación constante, lo que probaba que el grupo de homotopía  $\pi_3(S^2)$  es no trivial. El descubrimiento de esta aplicación, denominada *fibración de Hopf* o *aplicación de Hopf* en su honor, constituyó un gran avance en el campo de la topología algebraica y, en particular, en la moderna teoría de homotopía; se trata, además, de un objeto matemático de gran belleza y muy rico en propiedades geométricas y topológicas. Así pues, con el objetivo de estudiar algunas de dichas propiedades, en este capítulo construiremos la fibración clásica de Hopf empleando diferentes técnicas: en primer lugar, mostraremos una construcción sencilla utilizando coordenadas reales; a continuación, llevaremos a cabo una construcción detallada en términos de cuaterniones, lo que nos permitirá probar, entre otras cosas, que las fibras de la fibración de Hopf son circunferencias en  $S^3$  enlazadas dos a dos; finalmente, veremos cómo construirla utilizando geometría proyectiva y generalizaremos el procedimiento a esferas de otras dimensiones.

### ÍNDICE

2.1. Construcción de la fibración de Hopf con coordenadas reales . . . . .	21
2.2. Construcción de la fibración de Hopf mediante cuaterniones . . . . .	24
2.2.1. Rotaciones y cuaterniones . . . . .	24
2.2.2. Las rotaciones y la fibración de Hopf . . . . .	29
2.2.3. La fibración de Hopf a través de la proyección estereográfica . . . . .	33
2.3. Construcciones proyectivas de las fibraciones de Hopf . . . . .	37
2.3.1. La fibración de Hopf cuaterniónica y las esferas exóticas de Milnor . . . . .	39
2.3.2. Generalizaciones proyectivas de las fibraciones de Hopf . . . . .	39

### 2.1. Construcción de la fibración de Hopf con coordenadas reales

Como se ha mencionado en la introducción de este capítulo, en esta primera sección vamos a realizar la construcción de la fibración de Hopf  $h: S^3 \rightarrow S^2$  utilizando simplemente coordenadas reales.<sup>2</sup> A modo de adelanto de lo que veremos en las próximas páginas, la estrategia a seguir consistirá en construir la fibración de Hopf como la aplicación cociente de una cierta relación de equivalencia, definida en  $S^3$  como  $P \sim Q$  si y sólo si  $P$  y  $Q$  pertenecen a la misma circunferencia. En este momento, es posible que el lector se esté cuestionando si la relación descrita está, en efecto, bien definida. La respuesta es que, tal y como está escrita, no lo está, pues podría darse el caso de que las circunferencias no fuesen disjuntas, de modo que podría haber puntos que perteneciesen a más de una circunferencia y, por tanto, las clases de equivalencia no serían disjuntas dos a dos. Así pues, para que la relación descrita arriba sea de equivalencia es preciso lograr una descomposición de  $S^3$  en circunferencias disjuntas, de forma que por cada punto pase una única circunferencia. Luego, ¿cómo podemos lograr esto? La respuesta es ésta: haciendo que aquellas circunferencias de la relación de equivalencia sean las curvas integrales de un campo vectorial sin ceros definido globalmente sobre  $S^3$  y tangente a ella, pues, por el teorema de existencia y unicidad de solución de ecuaciones diferenciales, las curvas integrales de un campo vectorial son siempre disjuntas y por cada punto pasa una única curva maximal. En la Proposición 1.69 probamos que toda

<sup>1</sup>H. Hopf. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.*, 104 (1931), n.º 1, 637–665.

<sup>2</sup>Salvo que se indique lo contrario, en esta sección seguiremos el desarrollo realizado en el libro de F. Etayo: *Elementos de topología algebraica: grupo fundamental y clasificación de superficies*. Sanz y Torres, 2016, 47–51.

esfera de dimensión impar admite un campo sin ceros; en particular, si aplicamos dicho resultado a la esfera  $S^3$ , tenemos que el campo vectorial

$$(2.1) \quad \mathbf{X} = J_1(\mathbf{n}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3) \in \mathfrak{X}(S^3),$$

obtenido a partir de la acción de la estructura casi compleja  $J_1$  de  $\mathbb{R}^4$  dada en (1.17) sobre el vector normal  $\mathbf{n}$  a  $S^3$ , es un campo sin ceros, definido globalmente sobre  $S^3$  y tangente a ella, pues es claro que  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

**PROPOSICIÓN 2.1.** *Sea  $\mathbf{X}$  el campo obtenido en (2.1). Se verifica que las curvas integrales del campo  $\mathbf{X}$  son circunferencias.*

**DEMOSTRACIÓN.** A partir de la Definición 1.60, se tiene que las curvas integrales de  $\mathbf{X}$  serán aquellas curvas  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^3$ , con  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t))$ , tales que  $\gamma'(t) = \mathbf{X}(\gamma(t))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por tanto, para hallarlas hemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) &= -\gamma_2(t), \\ \gamma_2'(t) &= \gamma_1(t), \\ \gamma_3'(t) &= -\gamma_4(t), \\ \gamma_4'(t) &= \gamma_3(t). \end{cases}$$

Dado que las dos primeras ecuaciones son independientes de las dos últimas, podemos resolverlas por separado. A partir de las dos primeras llegamos a que

$$\gamma_1''(t) + \gamma_1(t) = 0 \implies \gamma_1(t) = A \cos t + B \sin t \implies \gamma_2(t) = -\gamma_1'(t) = A \sin t - B \cos t, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

De forma similar procedemos con las dos ecuaciones restantes:

$$\gamma_3''(t) + \gamma_3(t) = 0 \implies \gamma_3(t) = C \cos t + D \sin t \implies \gamma_4(t) = -\gamma_3'(t) = C \sin t - D \cos t, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la ecuación de una curva solución será de la forma siguiente:

$$(2.2) \quad \gamma(t) = (A \cos t + B \sin t, A \sin t - B \cos t, C \cos t + D \sin t, C \sin t - D \cos t),$$

con  $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$  para que la curva esté contenida en  $S^3$ . Veamos que estas curvas integrales son, en efecto, circunferencias. Para ello, hemos de ver que se obtienen como intersección de la esfera unidad de  $\mathbb{R}^4$  con un plano bidimensional que pase por el origen de coordenadas. La estrategia a seguir será calcular el plano que definen tres puntos concretos de la curva y, a continuación, probar que todos los puntos de la curva se encuentran en dicho plano. Consideremos, por tanto, los puntos de  $\gamma(t)$  tales que  $t = 0, \pi/2, \pi$ :

$$\gamma(0) = (A, -B, C, -D); \quad \gamma(\pi/2) = (B, A, D, C); \quad \gamma(\pi) = (-A, B, -C, D).$$

Dado que  $\gamma(0)$  y  $\gamma(\pi)$  son puntos antipodales, se tiene que el plano que definen los tres puntos pasa por el origen de coordenadas, luego podemos escribir las ecuaciones paramétricas de dicho plano de la forma siguiente:

$$f(\lambda, \mu) = \begin{cases} \gamma_1(t) &= \lambda A + \mu B, \\ \gamma_2(t) &= \lambda(-B) + \mu A, \\ \gamma_3(t) &= \lambda C + \mu D, \\ \gamma_4(t) &= \lambda(-D) + \mu C, \end{cases}$$

con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Es claro que los puntos de la curva son  $f(\cos t, \sin t)$ , luego están en el plano, como queríamos probar.  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.2.** La familia de curvas que hemos obtenido descompone la esfera en circunferencias disjuntas centradas en el origen; cada punto de  $S^3$  pertenece a una sola de las curvas  $\gamma(t)$  y se obtiene para un valor concreto de  $t$ .

**PROPOSICIÓN 2.3.** *Sea  $\sim$  la relación definida en  $S^3$  del modo siguiente: para todo  $P, Q \in S^3$ ,  $P \sim Q$  si y sólo si  $P$  y  $Q$  pertenecen a la misma curva integral del campo  $\mathbf{X}$ . Entonces, se verifica que  $\sim$  es una relación de equivalencia y que el espacio cociente  $S^3/\sim$  es  $S^2$ .*



DEMOSTRACIÓN. Es trivial ver que la relación descrita verifica las propiedades reflexiva y simétrica, mientras que la transitiva se verifica debido a que las curvas integrales de un campo vectorial son disjuntas; por tanto, la relación descrita en el enunciado es de equivalencia, y las clases de equivalencia son las curvas integrales del campo  $\mathbf{X}$ . Veamos ahora que el espacio cociente de la relación de equivalencia es  $S^2$ . Para ello, vamos a definir explícitamente la aplicación cociente  $S^3 \rightarrow S^2$  de forma que puntos que estén en la misma curva integral del campo  $\mathbf{X}$  tengan la misma imagen y que aquellos que estén en distinta curva integral tengan distinta imagen. Esta aplicación cociente es, precisamente, la fibración de Hopf, que definimos de la forma siguiente:<sup>3</sup>

$$(2.3) \quad \begin{array}{ccc} h: & S^3 & \longrightarrow S^2 \\ & (a, b, c, d) & \longmapsto (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(bc - ad), 2(bd + ac)) \end{array} .$$

En primer lugar, se prueba de forma sencilla que la imagen de  $h$  está contenida en  $S^2$ :

$$\begin{aligned} \|h(a, b, c, d)\|^2 &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2(bc - ad))^2 + (2(bd + ac))^2 \\ &= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + c^4 + d^4 + 2c^2d^2 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 \\ &\quad + 4b^2c^2 + 4a^2d^2 - 8abcd + 4b^2d^2 + 4a^2c^2 + 8abcd \\ &= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + c^4 + d^4 + 2c^2d^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 1, \end{aligned}$$

pues  $(a, b, c, d) \in S^3$ . Por tanto,  $\text{im}(h) \subseteq S^2$ , como queríamos comprobar. Veamos ahora que los puntos de la misma fibra tienen la misma imagen. Si consideramos la expresión general de las curvas integrales del campo  $\mathbf{X}$  dada en (2.2), se comprueba de forma directa que su imagen por  $h$  no depende de  $t$ , pues

$$\begin{aligned} h(\gamma(t)) &= h(A \cos t + B \sin t, A \sin t - B \cos t, C \cos t + D \sin t, C \sin t - D \cos t) \\ &= (A^2 \cos^2 t + B^2 \sin^2 t + \cancel{2AB \sin t \cos t} + A^2 \sin^2 t + B^2 \cos^2 t - \cancel{2AB \sin t \cos t} \\ &\quad - C^2 \cos^2 t - D^2 \sin^2 t - \cancel{2CD \sin t \cos t} - C^2 \sin^2 t - D^2 \cos^2 t + \cancel{2CD \sin t \cos t}, \\ &\quad 2(\cancel{AC \sin t \cos t} + AD \sin^2 t - BC \cos^2 t - \cancel{BD \sin t \cos t} \\ &\quad - \cancel{AC \sin t \cos t} + AD \cos^2 t - BC \sin^2 t + \cancel{BD \sin t \cos t}), \\ &\quad 2(AC \sin^2 t - \cancel{AD \sin t \cos t} - \cancel{BC \sin t \cos t} + BD \cos^2 t \\ &\quad + AC \cos^2 t + \cancel{AD \sin t \cos t} + \cancel{BC \sin t \cos t} + BD \sin^2 t)) \\ &= (A^2 + B^2 + C^2 + D^2, 2(AD - BC), 2(BD + AC)), \end{aligned}$$

luego todos los puntos de la misma curva integral tienen la misma imagen. Finalmente, es también sencillo probar que  $h$  es suprayectiva, pues, para cada  $(a, b, c) \in S^2$ , se verifica que

$$h\left(\frac{-b}{\sqrt{2(1-a)}}, \frac{c}{\sqrt{2(1-a)}}, 0, \sqrt{\frac{1-a}{2}}\right) = (a, b, c)$$

si  $a < 1$  y  $h(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0)$ , luego  $h$  es suprayectiva. Así pues, hemos visto que la aplicación  $h: S^3 \rightarrow S^2$  definida en (2.3) es suprayectiva y que todos los elementos de la misma curva integral, esto es, de la misma clase de equivalencia, tienen la misma imagen, luego queda probado que  $S^2$  es el espacio cociente de la relación  $\sim$  y que  $h$  es la aplicación cociente correspondiente.  $\square$

La construcción de la fibración de Hopf realizada en esta sección empleando coordenadas reales nos ha permitido trabajar con algunos de los conceptos de topología diferencial introducidos en el capítulo anterior y, además, es ciertamente una forma curiosa de construirla; sin embargo, trabajar con las fibras desde esta perspectiva no es sencillo. Por ello, y con el objetivo de estudiar las fibras con un poco más de detalle y de forma más intuitiva, en la sección siguiente realizaremos una nueva construcción de la fibración de Hopf, basada esta vez en el álgebra de división normada descubierta por Hamilton: los cuaterniones.

<sup>3</sup>La expresión de la fibración de Hopf mostrada aquí difiere de la dada originalmente por Hopf en su artículo [Hop31] solamente en el orden de las coordenadas. Con la notación utilizada en esta sección, la formulación original de Hopf es  $h((a, b, c, d)) = (2(bd + ac), 2(bc - ad), a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$ .

## 2.2. Construcción de la fibración de Hopf mediante cuaterniones

Como decíamos, una vez realizada la construcción de la fibración de Hopf con coordenadas reales, en esta sección abordaremos el problema desde una perspectiva diferente: llevaremos a cabo su construcción empleando cuaterniones<sup>4</sup>, lo que nos permitirá relacionarla con las rotaciones del espacio tridimensional y probar algunas propiedades curiosas, como el hecho de que las fibras de la fibración de Hopf están enlazadas.

**2.2.1. Rotaciones y cuaterniones.** Recordemos que una de las motivaciones originales de Hamilton en la búsqueda que culminó con el descubrimiento de los cuaterniones fue el ser capaz de caracterizar las rotaciones del espacio tridimensional; veamos, pues, la relación entre aquéllos y el tratamiento de éstas. En primer lugar, notemos que una rotación alrededor del origen en  $\mathbb{R}^3$  queda determinada por un vector para el eje de rotación y un ángulo de rotación alrededor de dicho eje.<sup>5</sup> Esta caracterización no es única, pues es fácil ver que la rotación determinada por el vector  $\mathbf{v}$  y el ángulo  $\theta$  es la misma que la determinada por el par  $(-\mathbf{v}, -\theta)$  o por el par  $(\lambda\mathbf{v}, \theta + 2n\pi)$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$  y  $\lambda$  es un escalar positivo cualquiera. En cualquier caso, es claro que podemos especificar cualquier rotación en  $\mathbb{R}^3$  utilizando sólo cuatro números reales: tres para el vector de rotación y uno para el ángulo. Aparentemente, es una mejora importante respecto a las nueve entradas de las matrices ortogonales  $3 \times 3$  empleadas en álgebra lineal. Por tanto, solamente necesitamos una forma eficiente de trabajar con las 4-tuplas de números reales para que este tratamiento de las rotaciones sea verdaderamente práctico; la respuesta, en efecto, son los cuaterniones.

Veamos, pues, cómo cada cuaternión  $r$  determina una rotación en  $\mathbb{R}^3$ , para lo cual vamos a construir una aplicación lineal  $R_r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que será la rotación buscada. A cada punto  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  le podemos asociar un cuaternión puro  $xi + yj + zk \in \mathbb{H}$ , al cual, abusando ligeramente de la notación, llamaremos asimismo  $P$ . Probemos, en primer lugar, que  $r^{-1}Pr$  es también un cuaternión puro.

**PROPOSICIÓN 2.4.** *Sea  $r = a + bi + cj + dk$  un cuaternión y  $P = xi + yj + zk$  un cuaternión puro. El producto  $r^{-1}Pr$  es un cuaternión puro.*

**DEMOSTRACIÓN.** Recordemos que, para cada cuaternión  $r$ , su inverso para el producto venía dado por

$$r^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{\|r\|^2}.$$

Entonces, se tendrá que

$$r^{-1}P = \frac{1}{\|r\|^2}(a - bi - cj - dk)(xi + yj + zk) = \frac{1}{\|r\|^2}(bx + cy + dz + i(ax - cz + dy) + j(ay - dx + bz) + k(az - by + cx)),$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} r^{-1}Pr &= \frac{1}{\|r\|^2} ((-axb + cby - dby - acy - bcz + dcx - adz + bdy - cdx + abx + acy + adz) \\ &\quad + i(a^2x - acz + ady + ady - d^2x + bdz - acz + bcy - c^2x + b^2x + bcy + bdz) \\ &\quad + j(a^2y - adx + abz + abz - b^2y + cbx - adx + cdz - d^2y + bcx + c^2y + dcz) \\ &\quad + k(a^2z - aby + acx + acx - c^2z + dcy - aby + bdx - b^2z + bdx + cdy + d^2z)) \\ (2.4) \quad &= \frac{1}{\|r\|^2} (i((a^2 + b^2 - c^2 - d^2)x + 2(ad + bc)y + 2(bd - ac)z) \\ &\quad + j(2(bc - ad)x + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)y + 2(ab + cd)z) \\ &\quad + k(2(ac + bd)x + 2(cd - ab)y + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)z)), \end{aligned}$$

por lo que la parte real de  $r^{-1}Pr$  es cero, como queríamos probar.  $\square$

<sup>4</sup>Salvo que se indique lo contrario, la referencia para esta sección es el artículo de D. W. Lyons: An Elementary Introduction to the Hopf Fibration. *Math. Mag.*, 76 (2003), n.º 2, 87–98. En este artículo la mayoría de los resultados son simplemente enunciados sin demostrarlos, por lo que mi tarea ha consistido en comprender las ideas presentes en el artículo y realizar las demostraciones de dichos resultados.

<sup>5</sup>Tomaremos  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ; mantendremos la convención de ángulos positivos para rotaciones en sentido contrario al de las agujas del reloj y ángulos negativos en caso contrario.

Una vez que hemos probado que el producto  $r^{-1}Pr$  es un cuaternión puro y, por tanto, puede considerarse como un punto  $x'i + y'j + z'k \cong (x', y', z')$  de  $\mathbb{R}^3$ , podemos definir la siguiente aplicación:<sup>6</sup>

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccc} R_r: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & r^{-1}Pr \end{array} .$$

Antes de probar que esta aplicación es, en efecto, una rotación, en la siguiente proposición se encuentran recogidas algunas propiedades que serán útiles en posteriores discusiones:

PROPOSICIÓN 2.5. *La aplicación  $R_r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida en (2.5) verifica las siguientes propiedades:*

- (I) *Es lineal.*
- (II)  *$R_{\lambda r} = R_r$  para todo  $r \in \mathbb{H}$  y todo  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .*
- (III) *Para todo  $r \neq 0$ ,  $R_r$  es invertible y su inversa viene dada por  $(R_r)^{-1} = R_{(r^{-1})}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Veamos cada uno de los apartados:

- (I) Sean  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  dos puntos y sean  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} R_r(\lambda P + \mu Q) &= r^{-1}(\lambda P + \mu Q)r = r^{-1}(\lambda P)r + r^{-1}(\mu Q)r = \lambda r^{-1}Pr + \mu r^{-1}Qr \\ &= \lambda R_r(P) + \mu R_r(Q), \end{aligned}$$

luego la aplicación  $R_r$  es lineal.

- (II) Sea  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Se tiene que

$$R_{\lambda r}(P) = (\lambda r)^{-1} P (\lambda r) = r^{-1} \lambda^{-1} P \lambda r = r^{-1} \lambda^{-1} \lambda P r = r^{-1} P r = R_r(P) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3,$$

luego  $R_{\lambda r}$  y  $R_r$  tienen el mismo dominio, la misma imagen y coinciden elemento a elemento, por lo que son iguales.

- (III) Basta probar que, para todo  $r \neq 0$ , se verifica que  $R_r \circ R_{(r^{-1})} = Id_{\mathbb{R}^3} = R_{(r^{-1})} \circ R_r$ . Sea  $P \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} (R_r \circ R_{(r^{-1})})(P) &= R_r(R_{(r^{-1})}(P)) = R_r(rPr^{-1}) = r^{-1}(rPr^{-1})r = (r^{-1}r)P(r^{-1}r) = P \\ &= Id_{\mathbb{R}^3}(P), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_{(r^{-1})} \circ R_r)(P) &= R_{(r^{-1})}(R_r(P)) = R_{(r^{-1})}(r^{-1}Pr) = r(r^{-1}Pr)r^{-1} = (rr^{-1})P(rr^{-1}) \\ &= P = Id_{\mathbb{R}^3}(P), \end{aligned}$$

luego  $R_r \circ R_{(r^{-1})}$ ,  $R_{(r^{-1})} \circ R_r$  y  $Id_{\mathbb{R}^3}$  tienen el mismo dominio, la misma imagen y coinciden elemento a elemento, por lo que son iguales.  $\square$

A partir del apartado (II) de la Proposición 2.5, es claro que, siempre y cuando sea  $r \neq 0$ , podemos tomar  $r$  de norma uno al trabajar con la aplicación  $R_r$ , lo que simplificará el análisis; por tanto, de ahora en adelante nos limitaremos a considerar cuaterniones de norma uno, es decir, puntos de la 3-esfera  $S^3$ , en el tratamiento de las rotaciones dadas por cuaterniones. En ese caso, además, dado que  $r^{-1} = \bar{r}$  si  $\|r\| = 1$ , escribiremos  $R_r(P) = \bar{r}Pr$ .

Veamos ahora que  $R_r$  define, en efecto, una rotación, y cómo podemos obtener el eje y el ángulo de dicha rotación a partir de las coordenadas  $(a, b, c, d)$  del cuaternión  $r$ . En el caso  $r = \pm 1$ , es trivial ver que  $R_r$  es la identidad; para el resto de casos, en los cuales la respuesta no es tan obvia, consideremos la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.6. *Dado un cuaternión  $r = a + bi + cj + dk \in S^3 \setminus \{-1, 1\}$ , la aplicación  $R_r$  es una rotación alrededor del eje determinado por el vector  $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ , con ángulo de rotación  $\theta = 2 \cos^{-1}(a)$ .*

<sup>6</sup>En el artículo [Lyo03] seguido en esta sección, se toma  $R_r(P) = rPr^{-1}$ . Como dijimos en la introducción, hemos tenido que modificar ligeramente la construcción para unificar las diferentes formulaciones de la fibración de Hopf presentes en el trabajo. Debido a la elección de esta definición para la rotación, algunas de las expresiones obtenidas en esta sección serán distintas a las del artículo citado.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, probemos que la aplicación  $R_r$  conserva la norma, esto es, que  $\|R_r(P)\| = \|P\|$  para todo cuaternión puro  $P$ .

$$\|R_r(P)\| = \|r^{-1}Pr\| = \|r^{-1}\| \|P\| \|r\| = \|P\|,$$

donde hemos hecho uso de que  $\mathbb{H}$  es un álgebra de división normada (véase la Definición 1.6). A continuación, para probar que el eje de rotación es el determinado por el vector  $(b, c, d)$  basta con ver que dicho vector es un vector propio de la aplicación lineal  $R_r$  con valor propio 1. Por tanto, probemos que  $R_r((b, c, d)) = (b, c, d)$ . En (2.4) vimos cuál era la expresión de la imagen de un punto  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  cualquiera por la aplicación  $R_r$ , por lo que basta con sustituir  $x = b$ ,  $y = c$  y  $z = d$ , con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned} R_r((b, c, d)) &= i(a^2b + b^3 - c^2b - d^2b + \cancel{2adc} + 2bc^2 + 2bd^2 - \cancel{2acd}) \\ &\quad + j(2b^2c - \cancel{2adb} + a^2c - b^2c + c^3 - d^2c + \cancel{2abd} + 2cd^2) \\ &\quad + k(\cancel{2acb} + 2b^2d + 2c^2d - \cancel{2abc} + a^2d - b^2d - c^2d + d^3) \\ &= i((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)b) + j((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)c) + k((a^2 + b^2 + c^2 + d^2)d) \\ &= bi + cj + dk \cong (b, c, d), \end{aligned}$$

lo que prueba que el vector  $(b, c, d)$  queda invariante por la rotación  $R_r$  y, por tanto, corresponde al eje de la rotación. Veamos ahora que el plano perpendicular al vector  $(b, c, d)$ , cuya ecuación es  $bx + cy + dz = 0$ , queda invariante por la rotación. Dado un punto  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  cualquiera, sabemos que  $R_r$  lleva  $P$  al punto dado por (2.4), luego sólo tenemos que comprobar que las componentes de  $R_r(P) = (R_r^1(P), R_r^2(P), R_r^3(P))$  verifican la ecuación del plano. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} bR_r^1(P) + cR_r^2(P) + dR_r^3(P) &= bx(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2by(ad + bc) + 2bz(bd - ac) \\ &\quad + 2cx(bc - ad) + cy(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + 2cz(ab + cd) \\ &\quad + 2dx(ac + bd) + 2dy(cd - ab) + dz(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \\ &= bx(a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2c^2 + 2d^2) + cy(2b^2 + a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2d^2) \\ &\quad + dz(2b^2 + 2c^2 + a^2 - b^2 - c^2 + d^2) + \cancel{2abdy} - \cancel{2abcz} - \cancel{2acd x} + \cancel{2abc z} \\ &\quad + \cancel{2acd x} - \cancel{2abdy} = bx + cy + dz = 0, \end{aligned}$$

como queríamos comprobar. Finalmente, probemos que el ángulo de la rotación es el dado por la expresión del enunciado de la proposición. Para ello, consideremos un vector  $\mathbf{w}$  perpendicular al vector propio  $(b, c, d)$  y hallemos el ángulo de la rotación teniendo en cuenta la expresión del producto escalar, es decir:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \implies \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

para dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  cualesquiera, donde  $\theta$  es el ángulo que forman dichos vectores. La razón de tomar  $\mathbf{w}$  perpendicular a  $(b, c, d)$  es simplemente que, dado cualquier vector, podemos descomponerlo en una componente paralela al vector  $(b, c, d)$  y otra perpendicular, y ya hemos probado que el vector  $(b, c, d)$  queda invariante bajo la rotación, luego para hallar el ángulo sólo hemos de fijarnos en la componente perpendicular al eje de la rotación. Así, si consideramos los vectores  $\mathbf{w}$  y  $R_r(\mathbf{w})$ , el ángulo de rotación vendrá dado por:

$$(2.6) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{w} \cdot R_r(\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\| \|R_r(\mathbf{w})\|} = \frac{\mathbf{w} \cdot R_r(\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|^2},$$

pues ya hemos visto que  $R_r$  conserva la norma. Llegados a este punto, distingamos dos casos:

- (i) Si  $b = c = 0$ , podemos tomar  $\mathbf{w} = i$ , con lo cual, haciendo uso de la expresión hallada en (2.4), se tiene que

$$R_r(\mathbf{w}) = i(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + j(2bc - 2ad) + k(2ac + 2bd) = i(a^2 - d^2) - 2jad.$$

Por tanto, el producto escalar de  $\mathbf{w}$  y  $R_r(\mathbf{w})$  vendrá dado por

$$\mathbf{w} \cdot R_r(\mathbf{w}) = (1, 0, 0) \cdot (a^2 - d^2, -2ad, 0) = a^2 - d^2 = 2a^2 - 1,$$

ya que  $(a, b, c, d) = (a, 0, 0, d) \in S^3$  y, por tanto,  $a^2 + d^2 = 1$ . Así, dado que  $\|\mathbf{w}\| = 1$ , y teniendo en cuenta la expresión (2.6), llegamos a que  $\cos \theta = 2a^2 - 1$ .

(II) Si  $b \neq 0$  o  $c \neq 0$ , podemos tomar  $\mathbf{w} = ci - bj$ . En ese caso, tendremos que

$$R_r(\mathbf{w}) = i(a^2c + b^2c - c^3 - d^2c - 2abd - 2b^2c) + j(2bc^2 - 2acd - a^2b + b^3 - c^2b + d^2b) \\ + k(2ac^2 + 2bcd - 2cd^2 + 2ab^2),$$

de modo que

$$\mathbf{w} \cdot R_r(\mathbf{w}) = a^2c^2 + b^2c^2 - c^4 - d^2c^2 - 2abcd - 2b^2c^2 - 2b^2c^2 + 2abcd + a^2b^2 - b^4 + c^2b^2 - d^2b^2 \\ = (b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - c^2 - d^2).$$

Así, nuevamente, teniendo en cuenta que  $\|\mathbf{w}\| = b^2 + c^2$  y haciendo uso de la expresión (2.6), obtenemos que  $\cos \theta = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 2a^2 - 1$ , pues  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , ya que, como ya se ha mencionado, estamos considerando  $\|r\| = 1$ .

Así pues, en ambos casos hemos obtenido que  $\cos \theta = 2a^2 - 1$ . Dado que  $r$  y  $-r$  definen la misma rotación, podemos tomar  $a \geq 0$  sin pérdida de generalidad. Teniendo en cuenta la expresión del coseno del ángulo doble, llegamos a que

$$2a^2 - 1 = \cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \implies a^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \implies \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = a \implies \theta = 2\cos^{-1}(a),$$

donde hemos hecho uso de que  $\theta \in [-\pi, \pi]$  (véase la Nota 5 de este capítulo), luego  $\theta/2 \in [-\pi/2, \pi/2]$  y, por tanto, ha de ser  $\cos(\theta/2) \geq 0$ . Esto concluye la demostración.  $\square$

Como vemos, toda la información de la rotación se encuentra completamente contenida en las cuatro coordenadas del cuaternión  $r$  de una forma mucho más elegante y práctica que en el caso de las matrices ortogonales  $3 \times 3$ . Y eso no es todo en cuanto a elegancia y eficiencia, pues la siguiente proposición muestra la que es, quizá, una de las propiedades más útiles de la caracterización de las rotaciones mediante cuaterniones:

**PROPOSICIÓN 2.7.** *Dados dos cuaterniones  $r, s \in S^3$ , se verifica que*

$$R_r \circ R_s = R_{sr}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Es claro que ambas aplicaciones tienen como dominio y como imagen  $\mathbb{R}^3$ , luego basta ver que coinciden elemento a elemento. Sea  $P \in \mathbb{R}^3$ , se tiene que

$$(R_r \circ R_s)(P) = \bar{r}(\bar{s}Ps)r = (\bar{r}\bar{s})P(sr) = \overline{(sr)}P(sr) = R_{sr}(P),$$

donde hemos hecho uso de la propiedad asociativa del producto de cuaterniones. Así, ambas aplicaciones coinciden elemento a elemento y, por tanto, son iguales.  $\square$

Esta proposición es de gran relevancia, pues muestra que la composición de dos rotaciones se reduce a multiplicar los cuaterniones asociados a cada una de ellas. Nuevamente, animamos al lector a comparar la complejidad del problema de hallar el eje y el ángulo de rotación de la composición de dos rotaciones utilizando, por un lado, el método matricial y, por otro lado, cuaterniones.

Hasta ahora hemos probado que cada cuaternión  $r$  define una rotación del espacio tridimensional. La siguiente proposición muestra que, en realidad, toda rotación del espacio tridimensional puede ser caracterizada en términos de cuaterniones.

**PROPOSICIÓN 2.8.** *Se verifican las siguientes propiedades:*

- (I) *El conjunto  $S^3$  de cuaterniones de norma uno, con la operación producto de cuaterniones, satisface los axiomas de un grupo.*
- (II) *El conjunto de las rotaciones de  $\mathbb{R}^3$ , con la operación composición, es también un grupo, llamado  $\text{SO}(3)$ .*
- (III) *La aplicación  $\varphi: S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$  dada por  $r \mapsto R_{\bar{r}}$  es un homomorfismo de grupos. En particular,  $\varphi$  es suprayectiva pero no inyectiva, y su núcleo es el subgrupo  $\ker(\varphi) = \{-1, 1\}$ .*

(IV) *Se tiene el siguiente isomorfismo de grupos:*

$$S^3/\{-1, 1\} \cong \text{SO}(3).$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos cada apartado separadamente:

- (I) Veamos que  $(S^3, \cdot)$  con el producto de cuaterniones es grupo. Comprobemos uno a uno los axiomas que ha de cumplir:
- Dado que  $\mathbb{H}$  es un álgebra de división normada, de la Definición 1.6 se sigue que el producto de cuaterniones de norma uno es operación interna.
  - Se verifica la propiedad asociativa, pues se verifica en general para el producto de cuaterniones de cualquier norma.
  - Existe elemento neutro, el 1, pues  $r1 = 1r = r$  para todo  $r \in S^3$ .
  - Para cada  $r \in S^3$ , existe  $r^{-1} = \bar{r} \in S^3$  tal que  $r\bar{r} = \bar{r}r = 1$ , pues  $\mathbb{H}$  es un álgebra asociativa y, por la Proposición 1.9, posee inversos multiplicativos.

Luego  $(S^3, \cdot)$  es grupo, como queríamos probar.

- (II) Probemos ahora que el conjunto de las rotaciones del espacio tridimensional con la operación composición tiene también estructura de grupo. Dicho conjunto puede verse como un subgrupo del grupo lineal general  $\text{GL}(3, \mathbb{R})$  formado por las matrices ortogonales unitarias, es decir:

$$\text{SO}(3) = \{A \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) : A^{-1} = A^t, \det(A) = 1\}.$$

De la misma forma que en el apartado anterior, comprobemos que  $(\text{SO}(3), \cdot)$  con la operación

$$\begin{aligned} \cdot : \text{GL}(3, \mathbb{R}) \times \text{GL}(3, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{GL}(3, \mathbb{R}) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

verifica los axiomas de grupo:

- Sean  $A, B \in \text{SO}(3)$ , se tiene que  $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$ , y  $(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$ , luego  $AB \in \text{SO}(3)$ , por lo que es operación interna.
- Se verifica la propiedad asociativa, pues se verifica en general para el producto de matrices cualesquiera.
- Existe elemento neutro, la matriz identidad  $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ , pues  $A \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}^3} = A = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \cdot A$  para todo  $A \in \text{SO}(3)$ .
- Para cada  $A \in \text{SO}(3)$ , existe  $A^{-1} = A^t \in \text{SO}(3)$ , pues  $\det(A^t) = \det(A) = 1$ , tal que  $AA^t = A^t A = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .

Luego  $(\text{SO}(3), \cdot)$  es grupo, como queríamos probar.

- (III) Para probar que  $\varphi$  es un homomorfismo de grupos hemos de ver, por un lado, que  $\varphi(1_{S^3}) = 1_{\text{SO}(3)}$ , donde  $1_{S^3}$  y  $1_{\text{SO}(3)}$  denotan, respectivamente, los elementos neutros de  $(S^3, \cdot)$  y  $(\text{SO}(3), \cdot)$ , y, por otro lado, que  $\varphi(rs) = \varphi(r) \circ \varphi(s)$ . La primera de estas propiedades es trivial, pues  $\varphi(1) = R_{\bar{1}} = R_1 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} = 1_{\text{SO}(3)}$ , y la segunda es consecuencia directa de la Proposición 2.7, ya que

$$\varphi(rs) = R_{\overline{rs}} = R_{\bar{s}\bar{r}} = R_{\bar{r}} \circ R_{\bar{s}} = \varphi(r) \circ \varphi(s).$$

Por tanto, queda probado que  $\varphi$  es un homomorfismo de grupos. Veamos ahora que es una aplicación suprayectiva. Hemos de ver que para toda rotación del espacio existe un cuaternión  $r \in S^3$  tal que dicha rotación es  $R_{\bar{r}}$ . Sea, pues,  $R \in \text{SO}(3)$  una rotación cualquiera. Esta rotación se producirá necesariamente respecto a un cierto eje y con un cierto ángulo  $\theta$ . El eje de rotación lo podemos considerar determinado por un vector de coordenadas  $(x, y, z)$  y de norma uno, y, por la Proposición 2.6, un cuaternión  $r = a + bi + cj + dk$  define una rotación de ángulo  $\theta = 2\cos^{-1}(a)$  respecto al eje dado por el vector  $(b, c, d)$ . Por tanto, podemos tomar  $r = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)(xi + yj + zk)$ , con lo que tendremos  $R_{\bar{r}} = R$ , lo que prueba que  $\varphi$  es suprayectiva. Hallemos ahora su núcleo, que vendrá dado por

$$\ker(\varphi) = \{r \in S^3 : \varphi(r) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Sea, pues,  $r = a + bi + cj + dk \in S^3$  y sea  $R_{\bar{r}}$  la rotación asociada correspondiente. Para que  $R_{\bar{r}}$  sea la identidad es preciso que el ángulo de rotación sea cero, lo cual, haciendo uso de la

Proposición 2.6, ocurrirá cuando  $a = 1$ . Por tanto, dado que  $\bar{r}$  ha de tener norma uno, ha de ser  $\bar{r} = 1 = r$ . No obstante, sabemos que  $r$  y  $-r$  definen la misma rotación, luego los cuaterniones tales que la rotación asociada es la identidad son  $1$  y  $-1$ , de modo que  $\ker(\varphi) = \{-1, 1\}$ , como queríamos probar.

- (IV) Es consecuencia directa del apartado anterior y del primer teorema de isomorfía, que enunciamos a continuación sin demostrarlo:

**TEOREMA 2.9** (Primer teorema de isomorfía). *Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. Entonces, existe un isomorfismo de grupos dado del modo siguiente:*

$$\begin{aligned} \tilde{f}: G/\ker(f) &\longrightarrow \text{im}(f) \\ x\ker(f) &\longmapsto \tilde{f}(x\ker(f)) = f(x) \end{aligned} .$$

Dado que en el apartado anterior hemos probado que  $\ker(\varphi) = \{-1, 1\}$  y que  $\text{im}(\varphi) = \text{SO}(3)$ , por el teorema anterior queda probado que  $S^3/\{-1, 1\} \cong \text{SO}(3)$ .<sup>7</sup>  $\square$

**2.2.2. Las rotaciones y la fibración de Hopf.** Tras la exposición de la relación entre los cuaterniones y las rotaciones del espacio realizada en la subsección anterior, es momento de volver a hablar de la fibración de Hopf y de cómo podemos construirla empleando cuaterniones. Fijemos un punto distinguido  $P_0 = (1, 0, 0) \cong i \in S^2$  (cualquier otro punto de  $S^2$  sería igualmente válido, pero hemos elegido éste porque conlleva una mayor sencillez en las fórmulas). Para cada punto  $(a, b, c, d) \in S^3$ , sea  $r = a + bi + cj + dk$  el cuaternión de norma uno correspondiente, que, como hemos visto, define una rotación  $R_r$  dada por (2.5). Definimos la fibración de Hopf como la aplicación  $h: S^3 \rightarrow S^2$  que lleva el cuaternión  $r \in S^3$  a la imagen de  $P_0$  por la rotación  $R_r$ , esto es,

$$(2.7) \quad \begin{aligned} h: S^3 &\longrightarrow S^2 \\ r &\longmapsto R_r(P_0) = \bar{r}ir \end{aligned} .$$

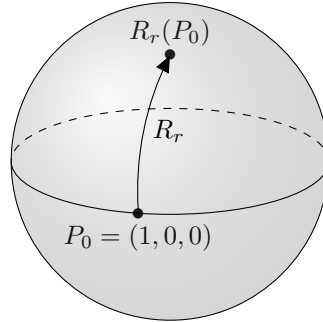


FIGURA 2.1. La fibración de Hopf lleva el cuaternión  $r \in S^3$  a la imagen  $R_r(P_0)$  del punto distinguido  $P_0 = (1, 0, 0)$  por la rotación  $R_r$  asociada a  $r$ .

**OBSERVACIÓN 2.10.** En (2.4) vimos cuál era la expresión de  $r^{-1}Pr$  para un punto  $P \in \mathbb{R}^3$  cualquiera. Si tomamos  $P = (1, 0, 0) \cong i$  obtenemos la expresión de la fibración de Hopf en coordenadas reales:

$$\bar{r}ir = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(bc - ad), 2(bd + ac)) ,$$

que coincide exactamente con la dada en (2.3).

Como se mencionó en la sección anterior, la decisión de construir la fibración de Hopf empleando cuaterniones no se debe a un mero capricho, sino que obedece al hecho de que desde esta nueva perspectiva es más sencillo e intuitivo estudiar las fibras —esto es, las contraímagenes de los puntos de  $S^2$ — y sus propiedades, algo que trabajando en coordenadas reales resultaría ciertamente farragoso y menos elegante. Así pues, tal y como hemos definido la fibración de Hopf en esta sección, la fibra de un punto  $P \in S^2$  por la aplicación  $h$  vendrá dada por el siguiente conjunto:

$$h^{-1}(P) = \{r \in S^3 : h(r) = P\} = \{r \in S^3 : \bar{r}ir = P\} .$$

Comencemos por ver lo que ocurre en un caso sencillo antes de estudiar el caso general.

<sup>7</sup>De hecho,  $\text{SO}(3)$  es difeomorfo al espacio proyectivo  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ , pues es  $S^3/\mathbb{Z}_2$ .

PROPOSICIÓN 2.11. Sea  $P = (1, 0, 0) \in S^2$ . Se verifica que la fibra  $h^{-1}(P)$  es la circunferencia  $C$  dada por la siguiente expresión:

$$C = \{(\cos t, \sin t, 0, 0) : 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{e^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi}.$$

DEMOSTRACIÓN. La fibra del punto  $P$  vendrá dada por

$$h^{-1}((1, 0, 0)) = \{r \in S^3 : h(r) = \bar{r}ir = i\}.$$

Por un lado, es claro que todos los puntos de  $C$  pertenecen a  $h^{-1}((1, 0, 0))$ , pues

$$\begin{aligned} e^{-it}ie^{it} &= (\cos t - i \sin t)i(\cos t + i \sin t) = (i \cos t + \sin t)(\cos t + i \sin t) \\ &= i(\cos^2 t + \sin^2 t) + \sin t \cos t - \sin t \cos t = i \quad \forall t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

luego tenemos que  $C \subseteq h^{-1}((1, 0, 0))$ . Veamos el otro contenido: dado  $r = a + bi + cj + dk \in h^{-1}((1, 0, 0))$ , se tiene que

$$\bar{r}ir = i \implies \begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 &= 1 \\ 2(bc - ad) &= 0 \\ 2(bd + ac) &= 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 1, \end{cases}$$

donde la cuarta ecuación proviene de la condición  $r \in S^3$ . Si restamos las ecuaciones primera y cuarta, obtenemos que ha de ser  $c = d = 0$ , luego la cuarta condición quedaría  $a^2 + b^2 = 1$ , esto es, una circunferencia de radio uno y centrada en el origen; por tanto, podemos parametrizarla tomando  $a = \cos t$ ,  $b = \sin t$ , con lo que obtendríamos  $h^{-1}((1, 0, 0)) \subseteq C$ , lo que nos permite concluir que  $h^{-1}((1, 0, 0)) = C$ , como queríamos probar.  $\square$

Tal y como vimos en la sección anterior, y como volveremos a ver en ésta empleando cuaterniones, esto es lo que ocurre en el caso general: para cualquier punto  $P \in S^2$ , la fibra  $h^{-1}(P)$  de dicho punto es una circunferencia en  $S^3$ . Veámoslo paso a paso.

En primer lugar, vamos a ver cómo podemos encontrar rotaciones que, dados dos puntos no antipodales  $A, B \in S^2$ , lleven el punto  $A$  al punto  $B$ . Consideremos un arco de círculo máximo que una  $A$  y  $B$ , y denotémoslo por  $AB$ ; notemos que este arco no es único, aunque el círculo máximo sí lo es —pues  $A$  y  $B$  son puntos no antipodales—. Si consideramos el eje de rotación como un vector de norma uno que parte del origen, se tiene que el extremo de dicho vector ha de encontrarse en algún punto del círculo máximo que bisecta  $AB$ , tal y como mostramos en la Figura 2.2. Aunque el vector podría apuntar a cualquier punto de dicho círculo máximo, hay dos puntos particulares para los cuales el ángulo de rotación es fácil de calcular:

- (I) Cuando el eje de rotación pasa por el punto medio  $M$  de  $AB$ , el ángulo de rotación  $\theta$  es  $\pi$  radianes o 180 grados (véase la Figura 2.3(a)). A esta rotación la llamaremos  $R_1$ .
- (II) Cuando el eje de rotación es perpendicular a los vectores  $\mathbf{v} = \mathbf{OA}$  y  $\mathbf{w} = \mathbf{OB}$ , el ángulo de rotación es el ángulo entre  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  (véase la Figura 2.3(b)) y viene dado por  $\cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ . A esta rotación la llamaremos  $R_2$ .

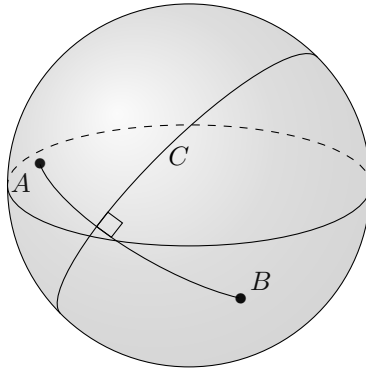


FIGURA 2.2. Dados dos puntos  $A$  y  $B$  no antipodales, el eje de cualquier rotación que lleve  $A$  a  $B$  ha de pasar por el círculo máximo  $C$  que bisecta al arco  $AB$ .



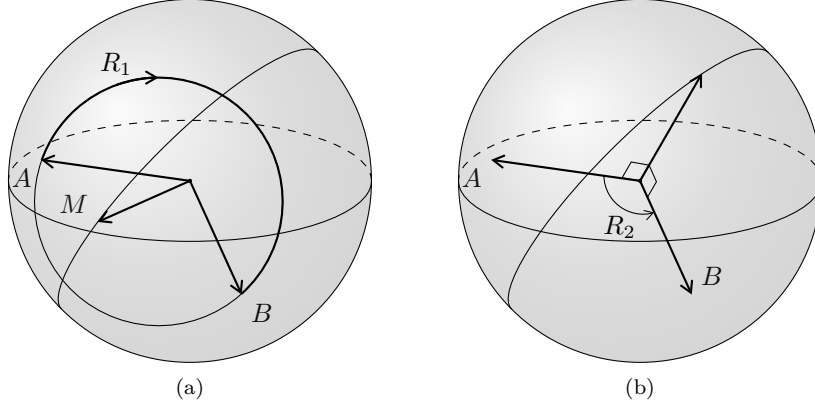


FIGURA 2.3. Hay dos rotaciones para las cuales es sencillo calcular el ángulo de rotación: (a) cuando el eje de rotación pasa por el punto medio  $M$  de  $AB$ , y (b) cuando el eje de rotación es perpendicular a los vectores  $\mathbf{OA}$  y  $\mathbf{OB}$ .

PROPOSICIÓN 2.12. Sea  $P = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ . Los cuaterniones  $r_1$  y  $r_2$  descritos anteriormente vienen dados por las siguientes expresiones:

$$(2.8) \quad r_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} ((1+p_1)i + p_2j + p_3k) ,$$

$$(2.9) \quad r_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} \left( 1 + \frac{p_3}{1+p_1}j - \frac{p_2}{1+p_1}k \right) .$$

DEMOSTRACIÓN. En ambos casos la rotación se produce desde el punto  $P_0 = (1, 0, 0) \cong i$  al punto  $P = (p_1, p_2, p_3)$ . Denotemos  $r_1 \cong (a_1, b_1, c_1, d_1)$  y  $r_2 \cong (a_2, b_2, c_2, d_2)$ . Analicemos ambos casos por separado:

- (I) EL EJE DE ROTACIÓN PASA POR EL PUNTO MEDIO DE  $P_0$  Y  $P$ . Ya hemos visto que en este caso el ángulo de rotación es  $\theta = \pi$ , luego  $a_1 = \cos(\theta/2) = 0$ . Hallemos  $b_1$ ,  $c_1$  y  $d_1$ . Para obtener el punto medio del arco  $P_0P$  basta calcular el punto medio del segmento que une  $P_0$  y  $P$  y trasladarlo a la superficie de la esfera  $S^2$  dividiendo por su norma. El punto medio de dicho segmento será

$$\frac{\mathbf{OP}_0 + \mathbf{OP}}{2} = \frac{1}{2} (1 + p_1, p_2, p_3) .$$

La norma de dicho punto será, por tanto,

$$\left\| \frac{\mathbf{OP}_0 + \mathbf{OP}}{2} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + p_1^2 + 2p_1 + p_2^2 + p_3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(1+p_1)} = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} ,$$

donde hemos hecho uso de que  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ , ya que  $P \in S^2$ . Luego tenemos que

$$\begin{aligned} (b_1, c_1, d_1) &= \frac{1}{\left\| \frac{\mathbf{OP}_0 + \mathbf{OP}}{2} \right\|} \left( \frac{\mathbf{OP}_0 + \mathbf{OP}}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} \left( \frac{1}{2} (1 + p_1, p_2, p_3) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} (1 + p_1, p_2, p_3) , \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} ((1+p_1)i + p_2j + p_3k) ,$$

como queríamos probar.

- (II) EL EJE DE ROTACIÓN ES PERPENDICULAR A  $\mathbf{OP}_0$  Y  $\mathbf{OP}$ . En este caso, el ángulo de rotación viene dado por  $\cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ , con  $\mathbf{v} = \mathbf{OP}_0 = (1, 0, 0)$  y  $\mathbf{w} = \mathbf{OP} = (p_1, p_2, p_3)$ . Luego tenemos que

$$\cos \theta = (1, 0, 0) \cdot (p_1, p_2, p_3) = p_1 \implies 2a_2^2 - 1 = p_1 \implies a_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} ,$$

donde hemos hecho uso de la Proposición 2.6. Hallemos ahora el vector  $\mathbf{u} = (b_2, c_2, d_2)$  de forma que sea  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \implies b_2 = 0.$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \implies c_2 p_2 + d_2 p_3 = 0 \implies c_2 = p_3, d_2 = -p_2.$$

Por tanto, se tiene que  $(b_2, c_2, d_2) = (0, p_3, -p_2)$ ; o, tomándolo de forma que tenga norma uno:

$$(b_2, c_2, d_2) = \frac{1}{\sqrt{p_3^2 + p_2^2}}(0, p_3, -p_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - p_1^2}}(0, p_3, -p_2),$$

donde hemos hecho uso de que  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$ . Haciendo ahora uso del apartado (III) de la Proposición 2.8, donde vimos cómo obtener el cuaternión asociado a una rotación cuyo eje y ángulo son conocidos, se tendrá que

$$\begin{aligned} r_2 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(b_2 i + c_2 j + d_2 k) = a_2 + (1 - a_2^2)(b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= \sqrt{\frac{1 + p_1}{2}} + \sqrt{1 - \frac{1 + p_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - p_1^2}}(p_3 j - p_2 k) \\ &= \sqrt{\frac{1 + p_1}{2}} + \sqrt{\frac{1 - p_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1 + p_1)(1 - p_1)}}(p_3 j - p_2 k) = \sqrt{\frac{1 + p_1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2(1 + p_1)}}(p_3 j - p_2 k) \\ &= \sqrt{\frac{1 + p_1}{2}} \left(1 + \frac{p_3}{1 + p_1} j - \frac{p_2}{1 + p_1} k\right), \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

OBSERVACIÓN 2.13. Se comprueba de forma directa que  $r_1 = i r_2$ . De hecho, en la siguiente proposición veremos que la fibra  $h^{-1}(P)$  son todos los puntos de la forma  $e^{it}r$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$ , y  $h(r) = P$ .

PROPOSICIÓN 2.14. Sean  $P \in S^2$  y  $r \in S^3$  tales que  $h(r) = P$ . Se verifica que la fibra  $h^{-1}(P)$  es una circunferencia en  $S^3$ , parametrizada de la forma siguiente:

$$h^{-1}(P) = \{e^{it}r\}_{0 \leq t \leq 2\pi}.$$

DEMOSTRACIÓN. Probémoslo por doble contenido:

- $\subseteq$ : Sea  $s \in h^{-1}(P)$ . Entonces, se tendrá que  $\bar{s}is = P$ . Por otro lado, por hipótesis se tiene que  $h(r) = P$ , luego tenemos que

$$\bar{s}is = \bar{r}ir \implies r\bar{s}is\bar{r} = r\bar{r}ir\bar{r} \implies r\bar{s}is\bar{r} = \|r\|^2 i \|r\|^2 = i,$$

por lo que hemos llegado a que  $s\bar{r} \in h^{-1}((1, 0, 0))$ . Dado que en la Proposición 2.11 probamos que  $h^{-1}((1, 0, 0)) = \{e^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , se deduce que existe  $t \in [0, 2\pi]$  tal que  $s\bar{r} = e^{it}$ , de donde, multiplicando por la derecha por  $r$  en ambos lados de la igualdad, se concluye que  $s = e^{it}r$  y, por tanto,  $s \in \{e^{it}r\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ . Esto prueba que  $h^{-1}(P) \subseteq \{e^{it}r\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ .

- $\supseteq$ : Sea  $t \in [0, 2\pi]$ . Se comprueba fácilmente que  $h(e^{it}r) = P$ , pues

$$h(e^{it}r) = \overline{e^{it}r}ie^{it}r = \bar{r}e^{-it}ie^{it}r = \bar{r}ir = h(r) = P,$$

donde hemos hecho uso de que  $e^{-it}ie^{it} = i$ , como probamos en la Proposición 2.11. Esto prueba que  $\{e^{it}r\}_{0 \leq t \leq 2\pi} \subseteq h^{-1}(P)$ .

Por tanto, llegamos a que  $h^{-1}(P) = \{e^{it}r\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , como queríamos probar.  $\square$

OBSERVACIÓN 2.15. La razón de haber calculado los cuaterniones  $r_1$  y  $r_2$  de la Proposición 2.12 es la necesidad de disponer de una expresión explícita de los elementos de la fibra  $h^{-1}(P)$  a la hora de explorar algunas de las propiedades de las fibras, como veremos en la siguiente subsección. Sin embargo, en dichos cálculos impusimos la condición de que los puntos inicial y final de la rotación no fuesen antipodales, por lo que aún no tenemos una expresión explícita para la fibra del punto  $(-1, 0, 0)$ . No obstante, es fácil comprobar que  $h(k) = (-1, 0, 0)$ , pues

$$h(k) = \bar{k}ik = -kik = -jk = -i \cong (-1, 0, 0).$$

Por tanto, haciendo uso de la Proposición 2.14, se tiene que  $h^{-1}((-1, 0, 0)) = \{e^{it}k\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ .

**2.2.3. La fibración de Hopf a través de la proyección estereográfica.** Tras probar que las fibras de la fibración de Hopf son circunferencias y obtener su expresión explícita en los diferentes casos posibles, en esta subsección vamos a tratar de visualizar la configuración de dichas fibras. A primera vista, esto puede parecer complicado dado que la 3-esfera  $S^3$  vive en  $\mathbb{R}^4$  y, por norma general, es ciertamente difícil imaginar objetos de más de tres dimensiones. Sin embargo, este pequeño inconveniente puede ser sorteado por medio de la proyección estereográfica, la cual, además, nos permitirá obtener una elegante descomposición de  $\mathbb{R}^3$  en una unión de circunferencias disjuntas y una línea recta. De hecho, veremos que la fibración de Hopf proporciona una solución para el siguiente problema:

**PROBLEMA 2.16** (Puzzle de las circunferencias enlazadas). Utilizando circunferencias disjuntas y una única línea recta, ¿es posible llenar  $\mathbb{R}^3$  de forma que las circunferencias se encuentren enlazadas dos a dos y la recta pase por el interior de cada una de ellas?

Sin la condición de que las circunferencias estuviesen enlazadas, la solución sería sencilla: bastaría tomar circunferencias concéntricas cuyos centros se encontrasen sobre la recta del enunciado. Sin embargo, la dificultad —y también el interés— del problema aumenta considerablemente al imponer que estén enlazadas. Veamos, pues, que las proyecciones estereográficas de las fibras resuelven el puzzle.

**PROPOSICIÓN 2.17.** Sea  $\pi_N: S^3 \setminus \{(1, 0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la proyección estereográfica dada en (1.12). Se verifican las siguientes propiedades:

- (I)  $\pi_N \circ h^{-1}((1, 0, 0))$  es el eje  $x$ .
- (II)  $\pi_N \circ h^{-1}((-1, 0, 0))$  es la circunferencia unidad en el plano  $yz$ .
- (III) Para cualquier otro punto  $P \in S^2 \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}$ ,  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$  es una circunferencia en  $\mathbb{R}^3$  que corta al plano  $yz$  en exactamente dos puntos  $A$  y  $B$ , uno dentro y otro fuera de la circunferencia unidad en dicho plano.
- (IV) Los puntos  $A$  y  $B$  se encuentran en una recta que pasa por el origen y que contiene al vector  $(0, p_3, -p_2)$ .
- (V) El plano de la circunferencia  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$  no contiene al eje  $x$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Probemos cada apartado separadamente:

- (I) En la Proposición 2.11 vimos que  $h^{-1}((1, 0, 0)) = \{e^{it}\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , luego

$$\pi_N \circ h^{-1}((1, 0, 0)) = \pi_N(e^{it}) = \pi_N((\cos t, \sin t, 0, 0)) = \left( \frac{\sin t}{1 - \cos t}, 0, 0 \right), \quad t \in (0, 2\pi).$$

Mediante un simple cambio de variable  $\alpha = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$  se llega a que el conjunto obtenido es el eje  $x$ .

- (II) En la Observación 2.15 vimos que  $h^{-1}((-1, 0, 0)) = \{e^{it}k\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , luego tendremos que

$$\pi_N \circ h^{-1}((-1, 0, 0)) = \pi_N(e^{it}k) = \pi_N((0, 0, -\sin t, \cos t)) = (0, -\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

que es la circunferencia unidad en el plano  $yz$ , como queríamos probar.

- (III) Sea  $P = (p_1, p_2, p_3) \in S^2 \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}$ . En la Proposición 2.14 vimos que  $h^{-1}(P) = \{e^{it}r\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$  donde  $r \in S^3$  era tal que  $h(r) = P$ . Supongamos entonces que  $h^{-1}(P) = \{e^{it}r_1\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , donde  $r_1$  es el cuaternión hallado en la Proposición 2.12. Para cada  $t \in [0, 2\pi]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} e^{it}r &= (\cos t + i \sin t) \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} ((1+p_1)i + p_2j + p_3k) = \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} (-(1+p_1) \sin t \\ &\quad + (1+p_1) \cos t i + (p_2 \cos t - p_3 \sin t)j + (p_3 \cos t + p_2 \sin t)k) \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{2(1+p_1)}} (-(1+p_1) \sin t, (1+p_1) \cos t, p_2 \cos t - p_3 \sin t, p_3 \cos t + p_2 \sin t) \\ &= \left( -\frac{\sqrt{1+p_1}}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{\sqrt{1+p_1}}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{p_2 \cos t - p_3 \sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}}, \frac{p_3 \cos t + p_2 \sin t}{\sqrt{2(1+p_1)}} \right). \end{aligned}$$

Por tanto, la proyección estereográfica vendrá dada en este caso por

$$\pi_N \circ h^{-1}(P) = \left( \frac{\sqrt{1+p_1} \cos t}{\sqrt{2} + \sqrt{1+p_1} \sin t}, \frac{p_2 \cos t - p_3 \sin t}{\sqrt{2(1+p_1)} + (1+p_1) \sin t}, \frac{p_3 \cos t + p_2 \sin t}{\sqrt{2(1+p_1)} + (1+p_1) \sin t} \right),$$

con  $t \in [0, 2\pi]$ . Además, es fácil ver que  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$  es una circunferencia, pues ya hemos visto que la fibra  $h^{-1}(P)$  lo es y, por la Proposición 1.38, la proyección estereográfica conserva las circunferencias. Veamos, pues, que  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$  corta al plano  $yz$  en exactamente dos puntos  $A$  y  $B$ . La ecuación de este plano es  $x = 0$ , luego se tendrá que

$$\frac{\sqrt{1+p_1} \cos t}{\sqrt{2} + \sqrt{1+p_1} \sin t} = 0 \implies \cos t = 0 \implies t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},$$

por lo que

$$\pi_N \circ h^{-1}(P) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} = \{A, B\},$$

donde

$$A = \pi_N \circ h^{-1}(P)(t = \pi/2) = \left(0, \frac{-p_3}{\sqrt{2(1+p_1)} + (1+p_1)}, \frac{p_2}{\sqrt{2(1+p_1)} + (1+p_1)}\right),$$

$$B = \pi_N \circ h^{-1}(P)(t = 3\pi/2) = \left(0, \frac{p_3}{\sqrt{2(1+p_1)} - (1+p_1)}, \frac{-p_2}{\sqrt{2(1+p_1)} - (1+p_1)}\right).$$

Falta por ver que  $A$  se encuentra dentro de la circunferencia unidad en el plano  $yz$ , mientras que  $B$  se encuentra fuera; esto es, hemos de probar que  $\|\mathbf{OA}\| < 1$  y que  $\|\mathbf{OB}\| > 1$ , donde

$$\|\mathbf{OA}\|^2 = \frac{p_3^2 + p_2^2}{\left(\sqrt{2(1+p_1)} + (1+p_1)\right)^2} = \frac{1-p_1^2}{\left(\sqrt{2(1+p_1)} + (1+p_1)\right)^2} = \frac{1-p_1}{(\sqrt{2} + \sqrt{1+p_1})^2},$$

$$\|\mathbf{OB}\|^2 = \frac{p_3^2 + p_2^2}{\left(\sqrt{2(1+p_1)} - (1+p_1)\right)^2} = \frac{1-p_1^2}{\left(\sqrt{2(1+p_1)} - (1+p_1)\right)^2} = \frac{1-p_1}{(\sqrt{2} - \sqrt{1+p_1})^2}.$$

Definamos las siguientes funciones:

$$g_A: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad g_B: [-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1-x}{(\sqrt{2} + \sqrt{1+x})^2}, \quad x \longmapsto \frac{1-x}{(\sqrt{2} - \sqrt{1+x})^2}.$$

Se tiene que  $g_A(-1) = g_B(-1) = 1$ . Veamos cómo son las derivadas de estas funciones:

$$g'_A(x) = \frac{-\sqrt{1+x}(\sqrt{2} + \sqrt{1+x}) - (1-x)}{\sqrt{1+x}(\sqrt{2} + \sqrt{1+x})^3} = \frac{-2 - \sqrt{2}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}(\sqrt{2} + \sqrt{1+x})^3} < 0 \quad \forall x \in (-1, 1),$$

luego  $g_A$  es una función estrictamente decreciente en el intervalo  $(-1, 1)$ , lo que prueba que  $\|\mathbf{OA}\| < 1$ . Análogamente,

$$g'_B(x) = \frac{-\sqrt{1+x}(\sqrt{2} - \sqrt{1+x}) + (1-x)}{\sqrt{1+x}(\sqrt{2} - \sqrt{1+x})^3} = \frac{2 - \sqrt{2}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}(\sqrt{2} - \sqrt{1+x})^3} > 0 \quad \forall x \in (-1, 1),$$

luego  $g_B$  es una función estrictamente creciente en el intervalo  $(-1, 1)$ , lo que prueba que  $\|\mathbf{OB}\| > 1$ . Por tanto, queda probado que  $A$  se encuentra dentro de la circunferencia unidad en el plano  $yz$ , mientras que  $B$  se encuentra fuera de ella.

(iv) Hallemos el vector  $\mathbf{AB}$ :

$$\mathbf{AB} = \left(0, \frac{p_3}{\sqrt{2(1+p_1)} - (1+p_1)} - \frac{-p_3}{\sqrt{2(1+p_1)} + (1+p_1)}, \frac{-p_2}{\sqrt{2(1+p_1)} - (1+p_1)} - \frac{p_2}{\sqrt{2(1+p_1)} + (1+p_1)}\right)$$

$$= \left(0, \frac{p_3\sqrt{2(1+p_1)} + p_3(1+p_1) + p_3\sqrt{2(1+p_1)} - p_3(1+p_1)}{2(1+p_1) - (1+p_1)^2}, \frac{-p_2\sqrt{2(1+p_1)} - p_2(1+p_1) - p_2\sqrt{2(1+p_1)} + p_2(1+p_1)}{2(1+p_1) - (1+p_1)^2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2(1+p_1)}}{2(1+p_1) - (1+p_1)^2} (0, p_3, -p_2),$$

por lo que la recta que une  $A$  y  $B$  contiene al vector  $(0, p_3, -p_2)$ , con lo que contendrá también a  $-(0, p_3, -p_2)$ , de donde se concluye que la recta pasa por el origen, como queríamos probar.

- (v) Finalmente, veamos que el plano de la circunferencia  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$  no contiene al eje  $x$ . Dado que  $\pi_N \circ h^{-1}(P)(t=0)$  y  $\pi_N \circ h^{-1}(P)(t=\pi)$  son puntos antipodales, se tiene que el plano que contiene a  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$  pasa por el origen y que el punto  $(0, 0, 0)$  se encuentra en el interior de la circunferencia. Si el eje  $x$  estuviese contenido en dicho plano, cortaría a  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$  en dos puntos. Sin embargo, dado que el eje  $x$  es  $\pi_N \circ h^{-1}((1, 0, 0))$ , esto es, la proyección de la fibra del punto  $(1, 0, 0)$ , lo anterior implicaría que dos fibras tienen intersección no vacía, lo cual es un absurdo, puesto que las fibras son disjuntas. Por tanto, se concluye que el eje  $x$  no puede estar contenido en el plano de la circunferencia  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$ , como queríamos probar.  $\square$

OBSERVACIÓN 2.18. La proposición anterior tiene importantes implicaciones: de lo probado en el apartado (III) se deduce que la proyección  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$  de la fibra está enlazada con la circunferencia unidad en el plano  $yz$ , mientras que el apartado (v) implica que el eje  $x$  pasa por el interior de la circunferencia  $\pi_N \circ h^{-1}(P)$ .

En la Proposición 2.17 hemos probado que la proyección estereográfica de la fibra  $h^{-1}(P)$  está enlazada con la circunferencia unidad en el plano  $yz$  para todo punto  $P \in S^2 \setminus \{(-1, 0, 0), (1, 0, 0)\}$ . Veremos ahora que este resultado nos permite probar de manera sencilla que dos circunferencias cualesquiera  $C$  y  $D$  que sean proyecciones de fibras están enlazadas. Para ello, construiremos un homeomorfismo  $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que lleve  $C$  a la circunferencia unidad en el plano  $yz$ , y  $D$  a cualquier otra circunferencia que sea proyección de una fibra. Por la Proposición 2.17, se tiene que la imagen de  $D$  habrá de estar enlazada con la circunferencia unidad en el plano  $yz$ , que es, precisamente, la imagen de  $C$ ; dado que, por la Proposición 1.85, el número de enlace se conserva bajo homeomorfismos, de lo anterior se sigue que  $C$  y  $D$  habrán de estar también enlazadas. Probemos, pues, la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.19. Sean  $C, D \subset \mathbb{R}^3$  las proyecciones de dos fibras cualesquiera de la fibración de Hopf, y sea  $P \in C$ . Sea, asimismo,  $r = \pi_N^{-1}(P)$ . La aplicación

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ Q &\longmapsto \pi_N \circ f \circ \pi_N^{-1}(Q) \end{aligned} ,$$

donde

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ x &\longmapsto xr^{-1}k \end{aligned} ,$$

es un homeomorfismo que verifica las siguientes propiedades:

- (I)  $\psi(C)$  es la circunferencia unidad en el plano  $yz$ .
- (II)  $\psi(D)$  es la proyección de una fibra de la fibración de Hopf.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $\psi$  es un homeomorfismo, pues  $\pi_N$  y  $f$  lo son. Dado que  $C$  es la proyección de una fibra, existirá  $P' \in S^2$  tal que  $C = \pi_N(h^{-1}(P'))$ . Por otro lado, por ser  $P \in C$  se tendrá que  $r = \pi_N^{-1}(P) \in \pi_N^{-1}(C) = h^{-1}(P')$ . Haciendo uso de la Proposición 2.14, podemos escribir  $h^{-1}(P') = \{e^{it}r'\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , donde  $r' \in S^3$  es un cuaternión tal que  $h(r') = P'$ . Por tanto, habrá de ser  $r \in \{e^{it}r'\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , luego existirá  $t_1 \in [0, 2\pi]$  de modo que  $r = e^{it_1}r'$ . Una vez dicho esto, probemos las afirmaciones (I) y (II):

- (I) Denotemos por  $S_{yz}^1$  la circunferencia unidad en el plano  $yz$ , esto es:

$$S_{yz}^1 := \{(0, \sin t, \cos t) : t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Probemos por doble contenido que  $\psi(C) = S_{yz}^1$ :

- $\subseteq$ : Sea  $Q \in C$ . Entonces,  $\pi_N^{-1}(Q) \in \{e^{it}r'\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , luego existirá  $t_2 \in [0, 2\pi]$  tal que  $\pi_N^{-1}(Q) = e^{it_2}r'$ . Hemos visto ya que  $r = e^{it_1}r'$ , luego  $r' = e^{-it_1}r$ , por lo que  $\pi_N^{-1}(Q) = e^{i(t_2-t_1)}r$ . Así, se tendrá que

$$f(\pi_N^{-1}(Q)) = f(e^{i(t_2-t_1)}r) = e^{i(t_2-t_1)}k \cong (0, -\sin(t_2-t_1), \cos(t_2-t_1)) \in S_{yz}^1.$$

Dado que  $f(\pi_N^{-1}(Q))$  está en el plano  $x=0$ , se tiene que  $\psi(Q) = \pi_N(f(\pi_N^{-1}(Q))) = f(\pi_N^{-1}(Q))$ , luego  $\psi(Q) \in S_{yz}^1$ . Por tanto, queda probado que  $\psi(C) \subseteq S_{yz}^1$ .

- $\supseteq$ : Sea  $z = (0, -\sin t, \cos t) \cong e^{it}k \in S_{yz}^1$  para algún  $t \in [0, 2\pi]$ . Queremos probar que  $z \in \psi(C)$ , esto es, que existe  $x \in C$  tal que  $z = \psi(x)$ . Se tiene que

$$z = e^{it}k = e^{it}rr^{-1}k = f(e^{it}r) = f(e^{it}e^{it_1}r') = f(e^{it'}r')$$

donde hemos llamado  $t' = t + t_1$ . En caso de que  $t + t_1$  fuese mayor que  $2\pi$ , bastaría tomar  $t' = (t + t_1)/2\pi$ . Dado que  $h^{-1}(P') = \{e^{it'}r'\}_{0 \leq t' \leq 2\pi}$ , se tiene que  $e^{it'}r' \in h^{-1}(P') = \pi_N^{-1}(C)$ , luego existirá  $x \in C$  tal que  $e^{it'}r' = \pi_N^{-1}(x)$ . Por tanto, se tendrá, finalmente, que

$$z = \pi_N(z) = \pi_N(f(e^{it'}r')) = \pi_N(f(\pi_N^{-1}(x))) = \psi(x) \in \psi(C),$$

con lo que queda probado que  $S_{yz}^1 \subseteq \psi(C)$ .

Esto finaliza la prueba que  $\psi(C)$  es la circunferencia unidad en el plano  $yz$ ; veamos el siguiente apartado:

- (II) Por ser  $D$  la proyección de una fibra, habrá de existir un punto  $T \in S^2$  tal que  $D = \pi_N(h^{-1}(T))$ . Así, lo que buscamos probar es que existe un punto  $T' \in S^2$  de forma que  $\psi(D) = \pi_N(h^{-1}(T'))$ . Por la Proposición 2.14, podemos escribir  $h^{-1}(T) = \{e^{it}s\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$  para algún cuaternión  $s \in S^3$  tal que  $h(s) = T$ . Sea  $x \in D$ ; entonces,  $\pi_N^{-1}(x) \in h^{-1}(T)$ , luego existirá  $t \in [0, 2\pi]$  tal que  $\pi_N^{-1}(x) = e^{it}s$ . Por tanto,  $f(\pi_N^{-1}(x)) = e^{it}sr^{-1}k$ . Llamemos  $q = sr^{-1}k$ ; dado que  $\mathbb{H}$  es un álgebra de división normada, a partir de la Definición 1.6 es claro que  $q \in S^3$ . Sea  $T' \in S^2$  tal que  $h(q) = T'$ ; entonces,  $h^{-1}(T') = \{e^{it}q\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ , luego  $\pi_N(h^{-1}(T'))$  es la proyección de una fibra. Veamos que  $\psi(D) = \pi_N(h^{-1}(T'))$  por doble contenido:

- $\subseteq$ : Sea  $y \in D$ ; entonces, existe  $t' \in [0, 2\pi]$  tal que  $\pi_N^{-1}(y) = e^{it'}s$  y  $f(\pi_N^{-1}(y)) = e^{it'}q$ . Dado que  $e^{it'}q \in h^{-1}(T')$ , se tendrá que  $\psi(y) = \pi_N(e^{it'}q) \in \pi_N(h^{-1}(T'))$ , luego  $\psi(D) \subseteq \pi_N(h^{-1}(T'))$ .
- $\supseteq$ : Sea  $z \in \pi_N(h^{-1}(T'))$ ; queremos probar que existe  $y \in D$  tal que  $z = \psi(y)$ . Se tiene que  $\pi_N^{-1}(z) \in h^{-1}(T')$ , luego  $\pi_N^{-1}(z) = e^{it}q = e^{it}sr^{-1}k = f(e^{it}s)$  para algún  $t \in [0, 2\pi]$ . Por tanto,  $z = \pi_N(f(e^{it}s))$ . Dado que  $e^{it}s \in \pi_N^{-1}(D)$ , habrá de existir un  $y \in D$  tal que  $e^{it}s = \pi_N^{-1}(y)$ . Así, se tendrá que  $z = \pi_N(f(\pi_N^{-1}(y))) = \psi(y)$ , con lo que  $\pi_N(h^{-1}(T')) \subseteq \psi(D)$ .

Se concluye, pues, que  $\psi(D) = \pi_N(h^{-1}(T'))$ , lo que termina la demostración.  $\square$

En las páginas anteriores hemos probado que las fibras de la fibración de Hopf son circunferencias  $S^1$  sobre  $S^3$  que se encuentran enlazadas dos a dos; de hecho, cada par de dichas circunferencias forma un enlace conocido como *enlace de Hopf*. Este enlace, que mostramos en la Figura 2.4, es el ejemplo más sencillo de enlace no trivial con más de una componente. Tal y como definimos el número de enlace en la Sección 1.5, se comprueba fácilmente a partir de la Figura 2.4 que ambos cruces verifican  $\varepsilon(p) = +1$ ; por tanto, para cada  $P, Q \in S^2$ , se tiene que  $\text{Lk}(h^{-1}(P), h^{-1}(Q)) = 1$ .

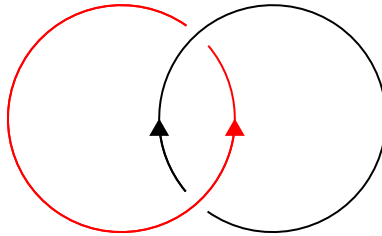


FIGURA 2.4. Enlace de Hopf, formado por dos circunferencias enlazadas con número de enlace igual a uno.

Las fibras de la fibración de Hopf encierran asimismo otras propiedades geométricas de gran interés, pero que no abordaremos aquí por cuestiones de espacio. Una de ellas, por ejemplo, es que las fibras de los puntos de un círculo de latitud en  $S^2$  forman un toro en  $S^3$ ; de hecho, las proyecciones estereográficas de las fibras de los paralelos de  $S^2$  son toros encajados que llenan todo  $\mathbb{R}^3$ .

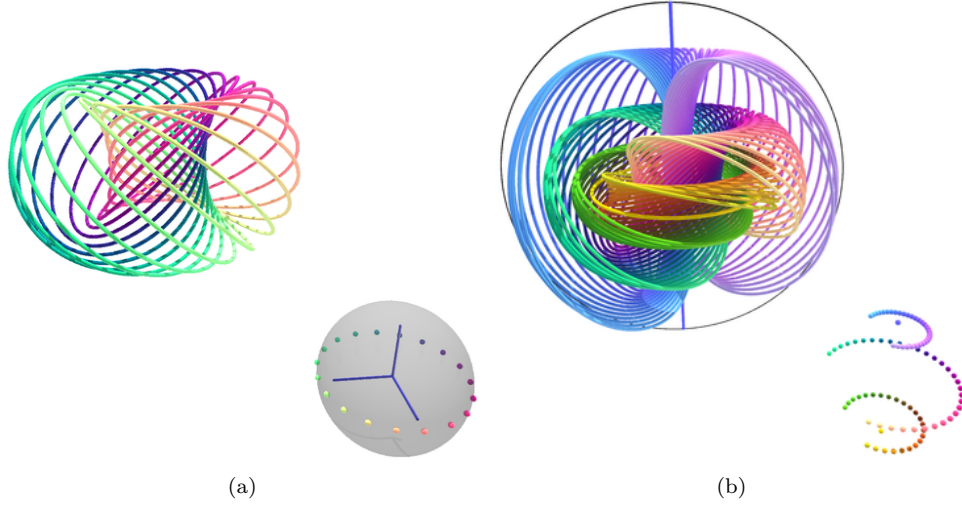


FIGURA 2.5. (a) Las fibras de los puntos de un paralelo de  $S^2$  forman un toro en  $S^3$ . (b) La proyección estereográfica de la fibra del punto  $(1, 0, 0) \in S^2$  es una recta, mientras que las fibras de los paralelos de  $S^2$  se proyectan en toros encajados que llenan todo  $\mathbb{R}^3$ . Ambas imágenes han sido extraídas de [Joh11].<sup>8</sup>

### 2.3. Construcciones proyectivas de las fibraciones de Hopf

Hasta ahora hemos visto cómo construir la fibración de Hopf empleando coordenadas reales y cuaterniones. Es posible construirla, también, considerando  $S^3$  como subconjunto de  $\mathbb{C}^2$  e identificando  $S^2$  con la recta proyectiva compleja  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  como describimos en la Sección 1.4.<sup>9</sup> Así pues, consideremos la esfera  $S^3$  definida como sigue:

$$S^3 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = 1\}.$$

La fibración de Hopf, en este caso, vendrá dada por la siguiente aplicación:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} h: S^3 &\longrightarrow \mathbb{P}_1^{\mathbb{C}} \\ (z_1, z_2) &\longmapsto [z_1 : z_2] \end{aligned}$$

Probemos que, en efecto, esta aplicación es la misma fibración de Hopf que hemos descrito en anteriores secciones.

**PROPOSICIÓN 2.20.** *La construcción de la fibración de Hopf realizada en (2.10) es equivalente a la realizada en (2.3) y (2.7).*

**DEMOSTRACIÓN.** Dado que en la Observación 2.10 se mostró que la construcción con coordenadas reales y la realizada con cuaterniones eran equivalentes, bastará con probar que la nueva construcción proyectiva es equivalente a la realizada en (2.3) para ver que las tres son equivalentes. Notemos que, dado que las coordenadas proyectivas están determinadas salvo proporcionalidad, podemos escribir  $[z_1 : z_2] = [1 : z_2/z_1]$  si  $z_1 \neq 0$ , y  $[0 : z_2] = [0 : 1]$  si  $z_1 = 0$ . Por tanto, podemos identificar el punto proyectivo  $[z_1 : z_2] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  con  $z_2/z_1$ , que será un número complejo bien definido si  $z_1 \neq 0$ , o el punto del infinito si  $z_1 = 0$ . Así pues, sean  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ . La estrategia a seguir es ésta: vamos a probar que existe una aplicación biyectiva  $\varphi: \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow S^2$  tal que  $\varphi(z_2/z_1) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(bc - ad), 2(bd + ac))$ , y que dicha aplicación viene dada por  $\varphi = \pi_S^{-1} \circ T$ , donde  $\pi_S: S^2 \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  es la proyección estereográfica dada en (1.13) y  $T: \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  es una transformación de Möbius cuya expresión viene dada por (1.22) tomando  $\alpha = i$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$  y  $\delta = 1$ . Así pues, se tendrá que

$$\varphi(z_2/z_1) = \pi_S^{-1} \circ T(z_2/z_1) = \pi_S^{-1}(iz_2/z_1),$$

<sup>8</sup>En [Joh11] puede encontrarse también un fantástico vídeo en el que se muestran de forma simultánea puntos de  $S^2$  y sus correspondientes fibras. Aunque dicho vídeo es recomendable simplemente por razones estéticas, su visualización puede ayudar a comprender mejor la configuración de las fibras de la fibración de Hopf.

<sup>9</sup>Esta construcción se puede encontrar en el artículo [Tre09] de Z. Treisman y en el libro clásico [Ste74, §20] de N. Steenrod.

donde

$$\frac{iz_2}{z_1} = \frac{ci - d}{a + bi} = \frac{(ci - d)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{bc - ad + i(bd + ac)}{a^2 + b^2} \cong \left( \frac{bc - ad}{a^2 + b^2}, \frac{bd + ac}{a^2 + b^2} \right).$$

Si llamamos  $x_1 = \frac{bc - ad}{a^2 + b^2}$ ,  $x_2 = \frac{bd + ac}{a^2 + b^2}$ , se tiene que

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2c^2 + 2abcd}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2},$$

de donde se sigue fácilmente que

$$1 + x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}, \quad 1 - (x_1^2 + x_2^2) = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{a^2 + b^2}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la expresión de  $\pi_S^{-1}$  dada en (1.15), se tiene que

$$\pi_S^{-1} \left( \frac{bc - ad}{a^2 + b^2}, \frac{bd + ac}{a^2 + b^2} \right) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(bc - ad), 2(bd + ac)),$$

de donde se concluye que

$$\psi(z_2/z_1) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(bc - ad), 2(bd + ac)),$$

como queríamos probar.  $\square$

Con esta construcción es también sencillo probar que las fibras son circunferencias. Veámoslo:

**PROPOSICIÓN 2.21.** *Sea  $h: S^3 \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  la fibración de Hopf dada en (2.10). Se verifica que  $h^{-1}(P)$  es una circunferencia para todo  $P \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $[z_1 : z_2] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Se tendrá, entonces, que

$$h^{-1}([z_1 : z_2]) = \{(w_1, w_2) \in S^3 : [w_1 : w_2] = [z_1 : z_2]\}.$$

Por tanto,

$$[w_1 : w_2] = [z_1 : z_2] \implies (w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dado que  $\|(w_1, w_2)\| = \|(z_1, z_2)\| = 1$ , se tendrá que

$$1 = \|(w_1, w_2)\| = \|\lambda\| \|(z_1, z_2)\| = \|\lambda\|,$$

luego  $\lambda$  es un número complejo de norma uno, por lo que podemos escribir  $\lambda = e^{it}$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Así, se tiene que

$$h^{-1}([z_1 : z_2]) = \{(w_1, w_2) \in S^3 : (w_1, w_2) = e^{it}(z_1, z_2)\},$$

es decir, una circunferencia en  $S^3$ , como queríamos probar.  $\square$

El procedimiento que acabamos de ver para construir la fibración de Hopf clásica  $S^3 \rightarrow S^2$  puede extenderse a otras esferas de forma análoga. De hecho, John F. Adams<sup>10</sup> probó en 1958 que sólo existen cuatro fibraciones en las que el espacio total, el espacio base y las fibras sean todas esferas, a saber,<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{R}} : S^0 &\hookrightarrow S^1 \longrightarrow S^1 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{R}), \\ h_{\mathbb{C}} : S^1 &\hookrightarrow S^3 \longrightarrow S^2 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{C}), \\ h_{\mathbb{H}} : S^3 &\hookrightarrow S^7 \longrightarrow S^4 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{H}), \\ h_{\mathbb{O}} : S^7 &\hookrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8 \cong \mathbb{P}_1(\mathbb{O}). \end{aligned}$$

La fibración  $h_{\mathbb{C}}$  es la misma que hemos analizado a lo largo de este capítulo; podemos denominarla fibración de Hopf *compleja*, por cuanto la imagen es la recta proyectiva compleja  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Así,  $h_{\mathbb{R}}$ ,  $h_{\mathbb{H}}$  y  $h_{\mathbb{O}}$

<sup>10</sup>J. F. Adams. On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.*, 72 (1960), 20–104.

<sup>11</sup>Con la notación  $S^p \hookrightarrow S^q \rightarrow S^r$  empleada para denotar estas fibraciones, el espacio total  $S^q$  es el conjunto inicial de la aplicación de Hopf  $S^q \rightarrow S^r$  correspondiente, el espacio base  $S^r$  es el conjunto imagen, y la fibra  $S^p$  es la contraimagen de un punto cualquiera de  $S^r$ . Aunque en este trabajo no manejamos conceptos de teoría de fibrados, cabe señalar que la estructura de fibrado implica, entre otras cosas, que el espacio total es localmente un producto de abiertos de la base por la fibra.



denotarían, respectivamente, la fibraciones de Hopf real, cuaterniónica y octoniónica. La construcción de estas últimas es, como hemos dicho, análoga a la realizada para  $h_{\mathbb{C}}$ . Si consideramos  $S^1$ ,  $S^7$  y  $S^{15}$  como subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$  y  $\mathbb{O}^2$ , respectivamente, tendremos que

$$\begin{aligned} S^1 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = 1\}, \\ S^7 &:= \{(r_1, r_2) \in \mathbb{H}^2 : \|r_1\|^2 + \|r_2\|^2 = 1\}, \\ S^{15} &:= \{(u_1, u_2) \in \mathbb{O}^2 : \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = 1\}, \end{aligned}$$

con lo que  $h_{\mathbb{R}}$ ,  $h_{\mathbb{H}}$  y  $h_{\mathbb{O}}$  vendrán dadas por

$$\begin{array}{ccc} h_{\mathbb{R}}: & S^1 & \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto [x_1 : x_2] \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} h_{\mathbb{H}}: & S^7 & \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{H}) \\ & (r_1, r_2) & \longmapsto [r_1 : r_2] \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} h_{\mathbb{O}}: & S^{15} & \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{O}) \\ & (u_1, u_2) & \longmapsto [u_1 : u_2] \end{array}.$$

De forma similar a lo que ocurría con  $h_{\mathbb{C}}$ , si denotamos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$  u  $\mathbb{O}$ , se tiene que la fibra de cualquier punto de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$  por la aplicación  $h_{\mathbb{K}}$  está formada por puntos de norma uno en  $\mathbb{K}$ ; la demostración, en los tres casos, es completamente análoga a la realizada en la Proposición 2.21, por lo que no la repetiremos.<sup>12</sup>

**2.3.1. La fibración de Hopf cuaterniónica y las esferas exóticas de Milnor.** En la Sección 1.3 mencionamos que la estructura diferenciable de una variedad no es única, y en la Definición 1.43 establecimos cuándo dos estructuras son equivalentes. Esto conduce de forma natural a preguntarse cuántas estructuras diferenciables no equivalentes puede admitir un conjunto. En el caso de las esferas, por ejemplo, hasta mediados del siglo XX nadie dudaba de que habrían de admitir una única estructura diferenciable —salvo difeomorfismo—. En efecto, esto es lo que ocurre en  $S^n$ , con  $n \leq 6$  y  $n \neq 4$ ,<sup>13</sup> el caso siguiente, sin embargo, es mucho más curioso:  $S^7$  admite 28 estructuras diferenciables no equivalentes.<sup>14</sup> La prueba de que  $S^7$  admite diferentes estructuras diferenciables no equivalentes le valió la Medalla Fields en 1962 a John Milnor, quien denominó *esferas exóticas* a aquéllas con estructura diferenciable distinta de la estándar, pero con la misma topología. Los primeros ejemplos de esferas exóticas fueron contruidos por Milnor como espacios totales, denotados  $M^7$ , de fibrados sobre  $S^4$  con fibra  $S^3$ ; en el caso de la fibración de Hopf cuaterniónica, dicho espacio total es, precisamente, la esfera estándar  $S^7$ . En primer lugar, Milnor probó que estos espacios  $M^7$  eran homeomorfos a  $S^7$  utilizando la Teoría de Morse, en particular el teorema de Reeb; para probar que, en cambio, no eran difeomorfos a  $S^7$ , empleó principalmente resultados de la teoría de clases características. Como dijimos en la Observación 1.73, al definir el espacio proyectivo sobre los cuaterniones es necesario elegir una multiplicación por defecto a izquierda o a derecha en la relación de equivalencia debido a la no conmutatividad del producto de cuaterniones; esto introduce un grado de libertad que no existe en la fibración de Hopf compleja  $h_{\mathbb{C}}$ , y que es la causa de que los ejemplos conocidos más sencillos de estructuras exóticas ocurran en dimensión siete en lugar de en dimensión tres ([McE15]).

**2.3.2. Generalizaciones proyectivas de las fibraciones de Hopf.** Las fibraciones  $h_{\mathbb{R}}$ ,  $h_{\mathbb{C}}$  y  $h_{\mathbb{H}}$  pueden generalizarse de forma que el espacio imagen no sea ya la recta proyectiva  $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ , con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ , sino el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ . La construcción de estas fibraciones, que denotaremos mediante  $h_{\mathbb{K}}^{gen}$ , es similar a las ya vistas. En primer lugar, si consideramos la esfera  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  definida como

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2 = 1\},$$

podemos definir  $h_{\mathbb{R}}^{gen}$  como sigue:

$$\begin{array}{ccc} h_{\mathbb{R}}^{gen}: & S^n & \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ & (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto [x_1 : \dots : x_{n+1}] \end{array}.$$

<sup>12</sup>Puede probarse también, aunque no lo haremos aquí, que dichas fibras se encuentran enlazadas dos a dos, tal y como ocurría con las circunferencias en el caso de  $h_{\mathbb{C}}$ ; la prueba de este hecho requeriría introducir el *invariante de Hopf*, lo cual escapa de los objetivos del trabajo. Así pues, por ejemplo, en el caso de  $h_{\mathbb{O}}$  se tiene que las fibras de dos puntos distintos de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{O})$  son 7-esferas enlazadas de forma no trivial en  $S^{15}$  ([Bae02, p. 172]).

<sup>13</sup>El caso de  $S^4$  es un problema abierto: se desconoce si existen esferas exóticas en dimensión 4. La afirmación de su no existencia se conoce como *conjetura de Poincaré diferenciable*. En dimensión 4 tenemos también otro sorprendente ejemplo de estructuras exóticas:  $\mathbb{R}^4$  admite un número infinito (no numerable) de estructuras diferenciables no equivalentes, mientras que  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \neq 4$ , admite sólo una ([Don83; Tau87]).

<sup>14</sup>M. Kervaire y J. Milnor. Groups of homotopy spheres: I. *Ann. of Math.* (2), 77 (1963), n.º 3, 504–537.

En el caso de  $h_{\mathbb{C}}^{gen}$ , dado que  $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ , podemos considerar la esfera  $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$  como subconjunto de  $\mathbb{C}^{n+1}$ :

$$S^{2n+1} := \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \|z_i\|^2 = 1\},$$

con lo que  $h_{\mathbb{C}}^{gen}$  vendrá dada por

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{C}}^{gen}: \quad S^{2n+1} &\longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \\ (z_1, \dots, z_{n+1}) &\longmapsto [z_1 : \dots : z_{n+1}] \end{aligned}.$$

Finalmente, dado que  $\mathbb{R}^{4n+4} \cong \mathbb{H}^{n+1}$ , podemos definir la esfera  $S^{4n+3} \subset \mathbb{R}^{4n+4}$  en términos de cuaterniones como sigue:

$$S^{4n+3} := \{(r_1, \dots, r_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \|r_i\|^2 = 1\},$$

con lo que  $h_{\mathbb{H}}^{gen}$  será la aplicación

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{H}}^{gen}: \quad S^{4n+3} &\longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{H}) \\ (r_1, \dots, r_{n+1}) &\longmapsto [r_1 : \dots : r_{n+1}] \end{aligned}.$$

Es fácil comprobar, procediendo exactamente igual que en los casos anteriores, que las fibras de  $h_{\mathbb{R}}^{gen}$ ,  $h_{\mathbb{C}}^{gen}$  y  $h_{\mathbb{H}}^{gen}$  son, respectivamente,  $S^0$ ,  $S^1$  y  $S^3$ .

OBSERVACIÓN 2.22. En el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ , ya mencionamos en la Observación 1.78 que no existe el espacio proyectivo  $\mathbb{P}_n(\mathbb{O})$  para  $n > 2$ . Sin embargo, aunque para  $n = 2$  sí que se puede construir el plano proyectivo sobre los octoniones, conocido como *plano de Cayley* (véanse [Bae02, Section 3.4] o [CS03, Chapter 12]), no existe la fibración  $S^{23} \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{O})$  con fibra  $S^7$ , debido, principalmente, a la no asociatividad de  $\mathbb{O}$  [Bes78, §0.26].

## Paralelización de esferas

INTRODUCCIÓN. A mediados del siglo XX, los trabajos de destacados matemáticos mostraron cómo las álgebras de división normadas subyacen también tras resultados fundamentales relativos a la existencia de paralelización y de estructura casi compleja en las esferas. En 1958, John F. Adams probó que las únicas esferas paralelizables son  $S^1$ ,  $S^3$  y  $S^7$ , resolviendo así un problema clásico de la topología diferencial; este resultado, combinado con otro debido a A. Kirchhoff, implica también que las únicas esferas que admiten estructura casi compleja son  $S^2$  y  $S^6$ . Así pues, en la primera parte de este capítulo construiremos las paralelizaciones de  $S^1$ ,  $S^3$  y  $S^7$  de forma explícita a partir de las estructuras casi complejas de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^8$ , así como las estructuras casi complejas de  $S^2$  y  $S^6$  a partir del producto vectorial definido en la parte imaginaria de  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ ; en la segunda parte, probaremos que el producto de esferas es paralelizable siempre y cuando una de ellas tenga dimensión 1, 3 o 7, lo que constituye un caso particular del teorema de Kervaire, y proporcionaremos un método para obtener la paralelización de dicho producto de forma explícita.

---

### ÍNDICE

3.1. Paralelizabilidad y estructuras casi complejas en las esferas . . . . .	41
3.1.1. Construcción explícita de estructuras casi complejas en $S^2$ y $S^6$ . . . . .	43
3.1.2. El problema de Hopf . . . . .	45
3.2. Paralelización explícita del producto de esferas . . . . .	45
3.2.1. Una familia particular de matrices simétricas . . . . .	46
3.2.2. Campos meridianos . . . . .	47
3.2.3. Campos meridianos coordinados . . . . .	49
3.2.4. Producto de una hipersuperficie paralelizable por una esfera . . . . .	50
3.2.5. Paralelización del producto de tres o más esferas . . . . .	51

---

### 3.1. Paralelizabilidad y estructuras casi complejas en las esferas

Comencemos introduciendo dos definiciones que conviene tener presentes a lo largo de este capítulo:

DEFINICIÓN 3.1 (Variedad paralelizable, paralelización). Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$ . Se dice que  $M$  es *paralelizable* si admite una base global de campos  $\{\mathbf{X}_i\}_{1 \leq i \leq m} \subset \mathfrak{X}(M)$ , esto es, si existen  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m \in \mathfrak{X}(M)$  tales que, para cada punto  $P \in M$ ,  $\{(\mathbf{X}_i)_P\}_{1 \leq i \leq m} \subset \mathfrak{X}(M)$  es una base del espacio tangente  $T_P M$ . Llamaremos *paralelización* de  $M$  a una elección particular de dicha base.

DEFINICIÓN 3.2 (Paralelización estándar). Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  una variedad paralelizable de dimensión  $m$ , donde  $\mathbb{R}^n$  está dotado de la métrica estándar. Llamaremos *paralelización estándar* de  $M$ , y la denotaremos p. s., al conjunto constituido por  $m$  campos vectoriales sobre  $M$ , todos ellos unitarios y ortogonales dos a dos.

En las décadas de 1940 y 1950, los trabajos de algunos de los matemáticos más prominentes del siglo XX dieron lugar a resultados fundamentales sobre la paralelizabilidad de las esferas. En primer lugar, en 1947, el matemático Adrian Kirchhoff<sup>1</sup> probó el siguiente resultado, que relaciona la existencia de estructura casi compleja en las esferas con su paralelizabilidad:

TEOREMA 3.3 (Kirchhoff, [Kir47]). *Si  $S^n$  admite una estructura casi compleja, entonces  $S^{n+1}$  es paralelizable.*

---

<sup>1</sup>A. Kirchhoff. Sur l'existence de certain champs tensoriels sur les sphères à  $n$  dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 225 (1947), 1258–1260. Una demostración de este resultado puede encontrarse en [KN69, Chapter IX, Example 2.6].

Unos años más tarde, en 1951, el suizo Armand Borel y el francés Jean-Pierre Serre<sup>2</sup> probaron el siguiente resultado:

TEOREMA 3.4 (Borel y Serre, [BS51]).  $S^n$ , con  $n \neq 2, 6$ , no admite estructura casi compleja.

Finalmente, en 1958, el matemático británico John Frank Adams<sup>3</sup> probó el siguiente fundamental resultado:

TEOREMA 3.5 (Adams, [Ada60]).  $S^n$  es paralelizable si y sólo si  $n = 1, 3, 7$ .

Es decir: las únicas esferas paralelizables son aquéllas formadas por los elementos de norma uno de las álgebras de división normadas  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ . De hecho, se pueden construir las paralelizaciones explícitas de dichas esferas a partir de las estructuras casi complejas de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^4$  y  $\mathbb{R}^8$  dadas en la Observación 1.66. Veámoslo:

PROPOSICIÓN 3.6. Sea  $m \in \{1, 3, 7\}$  y sea  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ . Denotemos por  $\mathbf{n} = (x_1, \dots, x_{m+1})$  el vector normal a la esfera  $S^m$  en el punto  $P = (x_1, \dots, x_{m+1})$ . Entonces, el conjunto de campos obtenidos mediante la acción de las estructuras casi complejas de  $\mathbb{R}^{m+1}$  sobre  $\mathbf{n}$  en cada punto proporciona una p. s. de  $S^m$ .

DEMOSTRACIÓN. Veámoslo para cada uno de los posibles valores de  $m$ :

- (I)  $m = 1$ : En  $\mathbb{R}^2$  tenemos la estructura casi compleja dada en (1.16). Si consideramos el campo

$$\mathbf{T} = J(\mathbf{n}) = i(x_1 + ix_2) = ix_1 - x_2 \cong (-x_2, x_1),$$

es claro que  $\mathbf{T}$  es un campo unitario y tangente a  $S^1$ , pues  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Por tanto, el conjunto  $\{\mathbf{T}\}$  es una p. s. de  $S^1$ .

- (II)  $m = 3$ : Consideremos ahora las estructuras casi complejas de  $\mathbb{R}^4$  dadas en (1.17), (1.18) y (1.19). Construimos los siguientes tres campos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= J_1(\mathbf{n}) = i(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) = ix_1 - x_2 + kx_3 - jx_4 \cong (-x_2, x_1, -x_4, x_3), \\ \mathbf{T}_2 &= J_2(\mathbf{n}) = j(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) = jx_1 - kx_2 - x_3 + ix_4 \cong (-x_3, x_4, x_1, -x_2), \\ \mathbf{T}_3 &= J_3(\mathbf{n}) = k(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4) = kx_1 + jx_2 - ix_3 - x_4 \cong (-x_4, -x_3, x_2, x_1). \end{aligned}$$

Estos campos son, como se comprueba de forma directa, unitarios y ortogonales dos a dos. Es claro también que  $\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n} = 0$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ , luego el conjunto  $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3\}$  constituye una p. s. de  $S^3$ .

- (III)  $m = 7$ : Finalmente, consideremos las estructuras casi complejas de  $\mathbb{R}^8$  definidas en (1.20). La acción de éstas sobre  $\mathbf{n}$  proporciona los siguientes siete campos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= J_1(\mathbf{n}) = e_1(x_1 + e_1x_2 + e_2x_3 + e_3x_4 + e_4x_5 + e_5x_6 + e_6x_7 + e_7x_8) \\ &= e_1x_1 - x_2 + e_4x_3 + e_7x_4 - e_2x_5 + e_6x_6 - e_5x_7 - e_3x_8 \\ &\cong (-x_2, x_1, -x_5, -x_8, x_3, -x_7, x_6, x_4), \\ \mathbf{T}_2 &= J_2(\mathbf{n}) = e_2(x_1 + e_1x_2 + e_2x_3 + e_3x_4 + e_4x_5 + e_5x_6 + e_6x_7 + e_7x_8) \\ &= e_2x_1 - e_4x_2 - x_3 + e_5x_4 + e_1x_5 - e_3x_6 + e_7x_7 - e_6x_8 \\ &\cong (-x_3, x_5, x_1, -x_6, -x_2, x_4, -x_8, x_7), \\ \mathbf{T}_3 &= J_3(\mathbf{n}) = e_3(x_1 + e_1x_2 + e_2x_3 + e_3x_4 + e_4x_5 + e_5x_6 + e_6x_7 + e_7x_8) \\ &= e_3x_1 - e_7x_2 - e_5x_3 - x_4 + e_6x_5 + e_2x_6 - e_4x_7 + e_1x_8 \\ &\cong (-x_4, x_8, x_6, x_1, -x_7, -x_3, x_5, -x_2), \\ \mathbf{T}_4 &= J_4(\mathbf{n}) = e_4(x_1 + e_1x_2 + e_2x_3 + e_3x_4 + e_4x_5 + e_5x_6 + e_6x_7 + e_7x_8) \\ &= e_4x_1 + e_2x_2 - e_1x_3 - e_6x_4 - x_5 + e_7x_6 + e_3x_7 - e_5x_8 \\ &\cong (-x_5, -x_3, x_2, x_7, x_1, -x_8, -x_4, x_6), \\ \mathbf{T}_5 &= J_5(\mathbf{n}) = e_5(x_1 + e_1x_2 + e_2x_3 + e_3x_4 + e_4x_5 + e_5x_6 + e_6x_7 + e_7x_8) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>A. Borel y J. P. Serre. Détermination des  $p$ -puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques. Applications. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 233 (1951), 680–682.

<sup>3</sup>J. F. Adams. On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.*, 72 (1960), 20–104.

$$\begin{aligned}
&= e_5x_1 - e_6x_2 + e_3x_3 - e_2x_4 - e_7x_5 - x_6 + e_1x_7 + e_4x_8 \\
&\cong (-x_6, x_7, -x_4, x_3, x_8, x_1, -x_2, -x_5), \\
\mathbf{T}_6 = J_6(\mathbf{n}) &= e_6(x_1 + e_1x_2 + e_2x_3 + e_3x_4 + e_4x_5 + e_5x_6 + e_6x_7 + e_7x_8) \\
&= e_6x_1 + e_5x_2 - e_7x_3 + e_4x_4 - e_3x_5 - e_1x_6 - x_7 + e_2x_8 \\
&\cong (-x_7, -x_6, x_8, -x_5, x_4, x_2, x_1, -x_3), \\
\mathbf{T}_7 = J_7(\mathbf{n}) &= e_7(x_1 + e_1x_2 + e_2x_3 + e_3x_4 + e_4x_5 + e_5x_6 + e_6x_7 + e_7x_8) \\
&= e_7x_1 + e_3x_2 + e_6x_3 - e_1x_4 + e_5x_5 - e_4x_6 - e_2x_7 - x_8 \\
&\cong (-x_8, -x_4, -x_7, x_2, -x_6, x_5, x_3, x_1).
\end{aligned}$$

Es claro que todos ellos son unitarios. Además, es fácil ver, a partir de la Tabla 3.1, que son ortogonales dos a dos y tangentes a  $S^7$ . Por tanto, concluimos que el conjunto  $\{\mathbf{T}_i\}_{1 \leq i \leq 7}$  forma una p. s. de  $S^7$ . Esto finaliza la demostración.

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$\mathbf{T}_1$	$-x_2$	$x_1$	$-x_5$	$-x_8$	$x_3$	$-x_7$	$x_6$	$x_4$
$\mathbf{T}_2$	$-x_3$	$x_5$	$x_1$	$-x_6$	$-x_2$	$x_4$	$-x_8$	$x_7$
$\mathbf{T}_3$	$-x_4$	$x_8$	$x_6$	$x_1$	$-x_7$	$-x_3$	$x_5$	$-x_2$
$\mathbf{T}_4$	$-x_5$	$-x_3$	$x_2$	$x_7$	$x_1$	$-x_8$	$-x_4$	$x_6$
$\mathbf{T}_5$	$-x_6$	$x_7$	$-x_4$	$x_3$	$x_8$	$x_1$	$-x_2$	$-x_5$
$\mathbf{T}_6$	$-x_7$	$-x_6$	$x_8$	$-x_5$	$x_4$	$x_2$	$x_1$	$-x_3$
$\mathbf{T}_7$	$-x_8$	$-x_4$	$-x_7$	$x_2$	$-x_6$	$x_5$	$x_3$	$x_1$
$\mathbf{n}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$

TABLA 3.1. Campos obtenidos por la acción de las estructuras casi complejas de  $\mathbb{R}^8$  sobre el vector normal  $\mathbf{n}$ . Se comprueba fácilmente que el producto escalar de cualesquiera dos filas es nulo.  $\square$

OBSERVACIÓN 3.7. En el caso de  $S^1$ , es posible obtener la paralelización sin tener que recurrir necesariamente a la estructura casi compleja de  $\mathbb{R}^2$ , pues basta con un poco de astucia intercambiando las coordenadas. En el caso de  $S^3$ , la astucia necesaria es ya un poco mayor, pero es aún un caso sencillo. En el caso de  $S^7$ , sin embargo, haría falta bastante más paciencia para obtener la paralelización simplemente intercambiando coordenadas; es en este caso donde realmente se muestra la utilidad de las estructuras casi complejas para construir las paralelizaciones.

Nótese que el resultado de Adams (Teorema 3.5), combinado con el de Kirchhoff (Teorema 3.3), implica el de Borel y Serre (Teorema 3.4). Así, los dos primeros resultados implican que las dos únicas esferas que admiten estructura casi compleja son  $S^2$  y  $S^6$ . Nuevamente, las álgebras de división normadas subyacen tras este hecho:  $S^2$  y  $S^6$  pueden ser vistas como los elementos puramente imaginarios de norma uno de  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ . De hecho, las estructuras casi complejas de  $S^2$  y  $S^6$  pueden construirse explícitamente, de forma análoga en ambos casos,<sup>4</sup> utilizando el producto vectorial, que solamente existe en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^7$ ; de nuevo, notemos que  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^7$  pueden identificarse con el conjunto de elementos puramente imaginarios de  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$ . Construyamos, pues, dichas estructuras casi complejas.

**3.1.1. Construcción explícita de estructuras casi complejas en  $S^2$  y  $S^6$ .** El procedimiento mediante el que vamos a construir las estructuras casi complejas de  $S^2$  y  $S^6$  es, como hemos mencionado, completamente válido para ambos casos, dado que puede realizarse de forma que no se utilicen más propiedades de  $\mathbb{H}$  y  $\mathbb{O}$  que las que ambos comparten. Así pues, en esta subsección  $\mathbb{K}$  será  $\mathbb{H}$  u  $\mathbb{O}$ . Denotaremos mediante  $U_{\mathbb{K}}$  el espacio vectorial formado por los elementos puramente imaginarios de  $\mathbb{K}$ ;  $U_{\mathbb{K}}$  tendrá, por tanto, dimensión real igual a 3 si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ , y 7 si  $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ . Asimismo, denotaremos mediante  $S_{\mathbb{K}}$  el conjunto de elementos de  $U_{\mathbb{K}}$  de norma uno, esto es:

$$S_{\mathbb{K}} := \{x \in U_{\mathbb{K}} : \|x\| = 1\}.$$

<sup>4</sup>A. Kirchhoff, en su artículo [Kir47] de 1947, construye la estructura casi compleja de  $S^6$  utilizando los octoniones. En este trabajo construiremos también la de  $S^2$ .

Como es claro,  $S_{\mathbb{K}}$  será  $S^2$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ , y  $S^6$  si  $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ . En el espacio vectorial  $U_{\mathbb{K}}$  podemos definir un producto escalar y un producto vectorial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \cdot: U_{\mathbb{K}} \times U_{\mathbb{K}} &\longrightarrow \mathbb{R} & \times: U_{\mathbb{K}} \times U_{\mathbb{K}} &\longrightarrow U_{\mathbb{K}} \\ (x, x') &\longmapsto x \cdot x' = -\operatorname{Re}(xx') & (x, x') &\longmapsto x \times x' = \operatorname{Im}(xx') \end{aligned}$$

donde  $xx'$  denota el producto usual de  $x$  y  $x'$  considerados como elementos de  $\mathbb{K}$ .

OBSERVACIÓN 3.8. Dado que  $-x \cdot x'$  y  $x \times x'$  son, respectivamente, la parte real y la parte imaginaria del producto  $xx'$ , se tendrá que  $xx' = -x \cdot x' + x \times x'$ .

OBSERVACIÓN 3.9. Dado que  $\mathbb{K}$  es una  $*$ -álgebra nicely normada, para todo  $x, x' \in U_{\mathbb{K}}$  se tendrá, a partir de la Definición 1.24, que

$$\operatorname{Re}(xx') = \frac{1}{2}(xx' + x'x), \quad \operatorname{Im}(xx') = \frac{1}{2}(xx' - x'x),$$

donde hemos hecho uso de que, para cada  $x \in U_{\mathbb{K}}$ , se tiene que  $x^* = -x$ .

PROPOSICIÓN 3.10. Sean  $x, x', x'' \in U_{\mathbb{K}}$ . Se verifican las siguientes propiedades:

- (I)  $xx = -x \cdot x = -\|x\|^2$ .
- (II)  $x \cdot x' = x' \cdot x$ .
- (III)  $x \times x' = -x' \times x$ .
- (IV)  $x \cdot (x \times x') = 0$ .
- (V)  $x \cdot (x' \times x'') = (x \times x') \cdot x''$ .

DEMOSTRACIÓN. Probemos cada una de las propiedades:

- (I) A partir de la Observación 3.9, se obtiene directamente que

$$-x \cdot x = \operatorname{Re}(xx) = \frac{1}{2}(xx + xx) = xx.$$

Asimismo, dado que  $x^* = -x$ , tenemos que  $xx = -x^*x = -\|x\|^2$ , con lo que tenemos también la igualdad restante.

- (II) A partir de la Observación 3.9 es claro que  $\operatorname{Re}(xx') = \operatorname{Re}(x'x)$ , luego  $x \cdot x' = x' \cdot x$ .  
 (III) Basta tener en cuenta que  $x \times x' = \operatorname{Im}(xx')$  y  $x' \times x = \operatorname{Im}(x'x)$ , y aplicar la Observación 3.9:

$$x \times x' = \operatorname{Im}(xx') = \frac{1}{2}(xx' - x'x) = -\frac{1}{2}(x'x - xx') = -\operatorname{Im}(x'x) = -x' \times x,$$

con lo que  $x \times x' = -x' \times x$ , como queríamos probar.

- (IV) Se comprueba directamente que

$$\begin{aligned} x \cdot (x \times x') &= -\operatorname{Re}(x(x \times x')) = -\operatorname{Re}(x\operatorname{Im}(xx')) = -\operatorname{Re}\left(x\frac{1}{2}(xx' - x'x)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(x(xx') - x(x'x)) = -\frac{1}{4}(x(xx') - x(yx') - (x'x)x + (xy)x) \\ &= -\frac{1}{4}((xx)x' - x'(xx)) = -\frac{1}{4}(-\|x\|^2x' + x'\|x\|^2) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de que  $\mathbb{K}$  es una  $*$ -álgebra alternativa y nicely normada.

- (V) En primer lugar, se tiene que

$$\begin{aligned} (x + x') \cdot ((x + x') \times x'') &= (x + x') \cdot (x \times x'' + x' \times x'') \\ &= x \cdot (x \times x'') + x' \cdot (x \times x'') + x \cdot (x' \times x'') + x' \cdot (x' \times x'') \\ &= x' \cdot (x \times x'') + x \cdot (x' \times x''), \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de lo probado en el apartado (IV) de esta proposición. Aplicando ese mismo resultado, llegamos a que  $(x + x') \cdot ((x + x') \times x'') = 0$ , con lo que  $x \cdot (x' \times x'') = -x' \cdot (x \times x'')$ . Por el apartado (III), tenemos que  $-x' \cdot (x \times x'') = x' \cdot (x'' \times x)$ ; aplicando ahora el mismo cálculo realizado al comienzo de este apartado a  $x' \cdot (x'' \times x)$ , se llega a que  $x' \cdot (x'' \times x) = x'' \cdot (x \times x')$  y, por el apartado (II), se obtiene que  $x'' \cdot (x \times x') = (x \times x') \cdot x''$ . Por tanto, hemos probado que  $x \cdot (x' \times x'') = (x \times x') \cdot x''$ , como buscábamos.  $\square$

Llegados a este punto, si identificamos el espacio tangente  $T_x S_{\mathbb{K}}$  con el subespacio vectorial

$$V_x = \{y \in U_{\mathbb{K}} : x \cdot y = 0\}$$

de  $U_{\mathbb{K}}$  paralelo a él, podemos definir un endomorfismo lineal  $J_x$  en  $V_x$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J_x: V_x &\longrightarrow V_x \\ y &\longmapsto x \times y \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3.11. *La aplicación  $J_x$  es un endomorfismo de  $V_x$ . Además, se verifica que  $J_x \circ J_x = -Id_{V_x}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Probemos, en primer lugar, que  $J_x$  es un endomorfismo. Sea  $y \in V_x$ ; hemos de probar que  $J_x(y) \in V_x$ , esto es, que  $x \times y \in U_{\mathbb{K}}$  y que  $x \cdot (x \times y) = 0$ . Lo primero es claro, ya que  $x, y \in U_{\mathbb{K}}$ , y lo segundo fue probado en la Proposición 3.10, luego  $J_x$  es un endomorfismo de  $V_x$ . Comprobemos ahora que  $J_x \circ J_x = -Id_{V_x}$ :

$$\begin{aligned} (J_x \circ J_x)(y) &= J_x(J_x(y)) = J_x(x \times y) = x \times (x \times y) = x(x \times y) - x \cdot (x \times y) = x(x \times y) \\ &= x(xy - x \cdot y) = x(xy) = (xx)y = -\|x\|^2 y = -y = -Id_{V_x}(y), \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de que  $\mathbb{K}$  es un álgebra alternativa. De lo anterior se concluye que  $J_x \circ J_x = -Id_{V_x}$ , ya que tienen el mismo dominio, la misma imagen y coinciden elemento a elemento.  $\square$

Como consecuencia de la Proposición 3.11, se tiene que la familia de endomorfismos  $J_x$ , con  $x \in S_{\mathbb{K}}$ , define una estructura casi compleja en  $S_{\mathbb{K}}$ , lo que concluye la construcción.

**3.1.2. El problema de Hopf.** En el caso de  $S^2$ , la estructura casi compleja que hemos construido es holomorfa, pues es la inducida por la estructura de variedad compleja de la recta proyectiva compleja  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \cong S^2$  (véase, por ejemplo, [KP18, Remark 2.3]). Sin embargo, en el caso de  $S^6$  puede probarse que  $N_J$  no es idénticamente nulo ([EF51; EL51]), con lo que, por el Teorema 1.68, se tiene que la estructura casi compleja que hemos construido no es holomorfa, esto es, no proviene de una estructura de variedad compleja definida en  $S^6$ ; detrás de este hecho se encuentra la no asociatividad del producto de octoniones. Así, surge de forma natural el siguiente problema, conocido como *problema de Hopf*:

PROBLEMA 3.12 (Problema de Hopf). Determinar si  $S^6$  admite estructura de variedad compleja.

Podría pensarse —ingenuamente— que un problema como éste, con sólo una esfera de dimensión no muy elevada, habría de ser fácil de resolver; nada más lejos de la realidad: el problema de Hopf es aún hoy en día un problema abierto cuya solución lleva más de setenta años resistiéndose a ser encontrada por algunos de los matemáticos más destacados de esta época.<sup>5</sup>

### 3.2. Paralelización explícita del producto de esferas

Como hemos visto, el Teorema 3.5 afirma que solamente hay tres esferas paralelizables:  $S^1$ ,  $S^3$  y  $S^7$ . Esto contrasta con el mucho más favorable caso del producto de esferas, para el cual se tiene el siguiente resultado, probado en 1956 por el francés Michel Kervaire<sup>6</sup> como parte de su tesis doctoral<sup>7</sup>:

TEOREMA 3.13 (Kervaire, [Ker56]). *El producto de esferas  $\prod_{i=1}^k S^{n_i}$ ,  $k \geq 2$ , es paralelizable si y sólo si al menos uno de los  $n_i$  es impar.*

La prueba de Kervaire del Teorema 3.13, no obstante, no es constructiva, esto es, no proporciona un método para construir explícitamente las paralelizaciones de dicho producto de esferas; éstas pueden encontrarse en [Par03]. En esta sección, sin embargo, nos limitaremos a probar que el producto de esferas es paralelizable siempre y cuando una de ellas tenga dimensión 1, 3 o 7, y proporcionaremos un método para construir paralelizaciones explícitas del producto en esos casos.<sup>8</sup>

<sup>5</sup>Remitimos al lector que desee más información sobre la historia del problema de Hopf al artículo de I. Agricola et al.: On the history of the Hopf problem. *Differ. Geom. Appl.*, 57 (2018), 1–9.

<sup>6</sup>M. Kervaire. Courbure intégrale généralisée et homotopie. *Math. Ann.*, 131 (1956), 219–252.

<sup>7</sup>Uno de los codirectores de Kervaire durante su Ph. D. fue Heinz Hopf, el mismo Hopf de la fibración de Hopf. El otro fue Beno Eckmann, también antiguo estudiante de Hopf.

<sup>8</sup>Salvo que se indique lo contrario, la referencia para esta sección es el artículo de M. Bruni: Sulla parallelizzazione esplicita dei prodotti di sfere. *Rend. di Mat.* (VII), 12 (1992), 405–423. Mi tarea al respecto ha consistido en comprender las ideas que desarrolla, enmarcar el tema que trata en el contexto de mi trabajo y completar los detalles de las demostraciones presentes en él.

**3.2.1. Una familia particular de matrices simétricas.** Introduzcamos, en primer lugar, una familia de matrices simétricas que será útil, en la Subsección 3.2.3, para analizar ciertos campos vectoriales sobre las esferas.

DEFINICIÓN 3.14. Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ; a cada punto  $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  le asociamos la matriz siguiente:

$$(3.1) \quad A_P = \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 & -x_1x_2 & \dots & -x_1x_n \\ -x_2x_1 & 1 - x_2^2 & \dots & -x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_nx_1 & -x_nx_2 & \dots & 1 - x_n^2 \end{pmatrix}.$$

PROPOSICIÓN 3.15. La matriz  $A_P$  verifica que  $\det(A_P) = 1 - \|\mathbf{OP}\|^2$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este resultado para el caso general es tediosa, aunque no entraña dificultad alguna. Aquí realizaremos la prueba con todo detalle solamente para el caso  $n = 3$ , pues en el resto de casos el procedimiento es completamente análogo.

Notemos que podemos escribir  $-x_i x_j = 0 - x_i x_j$ . Consideremos, pues, la matriz

$$A_P = \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 & 0 - x_1x_2 & 0 - x_1x_3 \\ 0 - x_2x_1 & 1 - x_2^2 & 0 - x_2x_3 \\ 0 - x_3x_1 & 0 - x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, si aplicamos la siguiente propiedad del determinante:

*Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponen en una suma de  $h$ -sumandos, entonces su determinante es igual a la suma de  $h$  determinantes, de forma que el  $i$ -ésimo de ellos tiene el sumando  $i$ -ésimo en dicha fila o columna y el resto de elementos permanecen iguales a los del determinante inicial.*

obtenemos una descomposición del determinante de  $A_P$  en una suma de  $2^3$  determinantes. Veámoslo:

$$\begin{aligned} \det(A_P) &= \begin{vmatrix} 1 - x_1^2 & 0 - x_1x_2 & 0 - x_1x_3 \\ 0 - x_2x_1 & 1 - x_2^2 & 0 - x_2x_3 \\ 0 - x_3x_1 & 0 - x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 - x_2x_1 & 1 - x_2^2 & 0 - x_2x_3 \\ 0 - x_3x_1 & 0 - x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ 0 - x_2x_1 & 1 - x_2^2 & 0 - x_2x_3 \\ 0 - x_3x_1 & 0 - x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 - x_3x_1 & 0 - x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x_2x_1 & -x_2^2 & -x_2x_3 \\ 0 - x_3x_1 & 0 - x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 - x_3x_1 & 0 - x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & -x_2^2 & -x_2x_3 \\ 0 - x_3x_1 & 0 - x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & -x_3^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x_2x_1 & -x_2^2 & -x_2x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x_2x_1 & -x_2^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & -x_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & -x_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & -x_2^2 & -x_2x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & -x_2^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & -x_3^2 \end{vmatrix} \\ &= 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1 - \|\mathbf{OP}\|^2, \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

OBSERVACIÓN 3.16. A partir de la Proposición 3.15, es claro que el rango de  $A_P$  es igual a  $n$  si y sólo si  $\|\mathbf{OP}\| \neq 1$ . La siguiente proposición muestra qué ocurre cuando  $\|\mathbf{OP}\| = 1$ .



PROPOSICIÓN 3.17. *Se verifica que  $\text{rank}(A_P) = n - 1$  si y sólo si  $\|\mathbf{OP}\| = 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Probemos ambas implicaciones:

- $\Leftarrow$  : Sea  $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\mathbf{OP}\| = 1$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , sea  $\mathbf{v}_i$  el vector cuyas coordenadas son los elementos de la  $i$ -ésima columna de  $A_P$ . Es inmediato ver que  $\mathbf{OP} \cdot \mathbf{v}_i = 0$ , ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} \cdot \mathbf{v}_i &= (x_1, \dots, x_n) \cdot (-x_1x_i, \dots, 1 - x_i^2, \dots, -x_nx_i) \\ &= -x_1^2x_i + \dots + x_i - x_i^3 + \dots + (-x_nx_i) = x_i - x_i \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \\ &= x_i - x_i \|\mathbf{OP}\|^2 = 0, \end{aligned}$$

pues la hipótesis de partida era  $\|\mathbf{OP}\| = 1$ . De lo anterior se deduce que  $\mathbf{v}_i$  es un elemento del espacio tangente  $T_P S^{n-1}$ . Vamos a probar ahora que  $\text{rank}(A_P) = n - 1$  viendo que las columnas de  $A_P$  generan un espacio vectorial de dimensión  $n - 1$ , que será justamente  $T_P S^{n-1}$ . Sea, pues,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  otro elemento de  $T_P S^{n-1}$ ; veamos que  $\mathbf{y} = \sum_i y_i \mathbf{v}_i$ :

$$\sum_i y_i \mathbf{v}_i = \sum_i y_i (-x_1x_i, \dots, 1 - x_i^2, \dots, -x_nx_i).$$

Esta suma dará lugar a un vector de  $n$  coordenadas, cuya  $j$ -ésima coordenada vendrá dada por

$$y_j(1 - x_j^2) + \sum_{i \neq j} y_i(-x_ix_j) = y_j - x_j \sum_i y_ix_i = y_j,$$

pues  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{OP} = 0$ , ya que  $\mathbf{y} \in T_P S^{n-1}$ . Por tanto, se tiene que  $\mathbf{y} = \sum_i y_i \mathbf{v}_i$ , de donde se concluye que todo vector de  $T_P S^{n-1}$  se puede expresar como una combinación lineal de los vectores  $\{\mathbf{v}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  y, por tanto, dichos vectores generan un espacio vectorial de dimensión  $n - 1$ , que es, precisamente, lo que buscábamos probar.

- $\Rightarrow$  : Supongamos  $\text{rank}(A_P) = n - 1$ ; esto implica, necesariamente, que  $\det(A_P) = 0$ . Dado que en la Proposición 3.15 hemos probado que  $\det(A_P) = 1 - \|\mathbf{OP}\|^2$ , se concluye que  $\|\mathbf{OP}\|^2 = 1$ , como queríamos probar.  $\square$

**3.2.2. Campos meridianos.** Consideremos ahora un tipo particular de campos vectoriales sobre la esfera  $S^{n-1}(K, R)$ , provistos de dos puntos singulares —esto es, tales que el campo se anula en ellos— antipodales, a los cuales llamaremos  $S$  y  $N$ . Denotaremos dichos campos mediante  $\mathbf{M}$  y, por las razones que pronto veremos, los denominaremos *campos meridianos* sobre  $S^{n-1}$ .

DEFINICIÓN 3.18 (Campo meridiano). Sean  $S, N \in S^{n-1}(K, R)$  dos puntos antipodales. Llamaremos *campo meridiano* definido sobre la esfera  $S^{n-1}(K, R)$ , y lo denotaremos por  $\mathbf{M}$ , al campo vectorial sobre  $S^{n-1}(K, R)$  definido por las siguientes condiciones:

- (I) El vector  $\mathbf{M}_P \in \mathbf{M}$  pertenece al plano  $SPN$ .
- (II) La norma de  $\mathbf{M}_P$  es igual a la distancia de  $P$  al diámetro  $SN$ .
- (III)  $\mathbf{M}_P$  es tangente al semicírculo orientado  $SPN$  y tiene la misma orientación que él.

OBSERVACIÓN 3.19. A partir de la Definición 3.18, es claro que las curvas integrales del campo  $\mathbf{M}_{S,N}$  son los meridianos de  $S^{n-1}$  que tienen a  $S$  y  $N$  como polos.

OBSERVACIÓN 3.20. La Figura 3.1, que muestra el caso de un campo meridiano sobre  $S^2$ , puede ser de utilidad a la hora de visualizar dichos campos. Se observa claramente que dicho campo presenta dos puntos singulares en  $S$  y  $N$ .

Hallems ahora cuál es la expresión analítica del campo  $\mathbf{M}$ . Para ello, expresaremos el vector unitario  $\widehat{\mathbf{M}}_P = \mathbf{M}_P / \|\mathbf{M}_P\|$  y el escalar  $\|\mathbf{M}_P\|$  en función de los puntos  $S, P$  y  $N$ . Como se observa en la Figura 3.1(b), se tiene que  $\theta = \angle SPK$  y que  $\mathbf{M}_P \perp \mathbf{PK}$ , pues  $\mathbf{M}_P$  es tangente a la esfera en el punto  $P$ .

LEMA 3.21. *El vector unitario  $\widehat{\mathbf{M}}_P$  viene dado por*

$$(3.2) \quad \widehat{\mathbf{M}}_P = \widehat{\mathbf{SP}} \sin \theta + \widehat{\mathbf{PN}} \cos \theta = \widehat{\mathbf{SP}} \cdot \frac{\mathbf{PK} \cdot \mathbf{PN}}{\|\mathbf{PK}\| \|\mathbf{PN}\|} + \widehat{\mathbf{PN}} \cdot \frac{\mathbf{PK} \cdot \mathbf{PS}}{\|\mathbf{PK}\| \|\mathbf{PS}\|}.$$

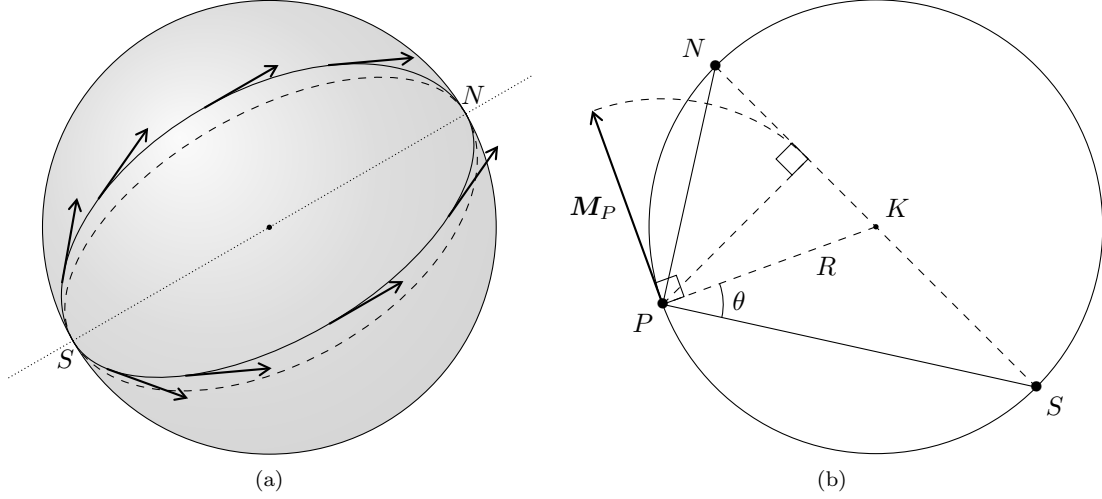


FIGURA 3.1. (a) Representación de un campo meridiano definido sobre la esfera  $S^2$ . (b) Plano  $SPN$  formado por los polos y un punto  $P \in S^2$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los vectores unitarios  $\widehat{PK}$ ,  $\widehat{PN}$  y  $\widehat{PS}$ . Dado que  $\widehat{PN}$  y  $\widehat{PS}$  son ortogonales, podemos descomponer el vector  $\widehat{PK}$  en dos componentes, una en la dirección de  $\widehat{PS}$  y otra en la de  $\widehat{PN}$ , tal y como se muestra en la Figura 3.2(b), con lo que se obtendría que

$$\widehat{PK} = \|\widehat{PK}\| \cos \theta \widehat{PS} + \|\widehat{PK}\| \sin \theta \widehat{PN} = \cos \theta \widehat{PS} + \sin \theta \widehat{PN}.$$

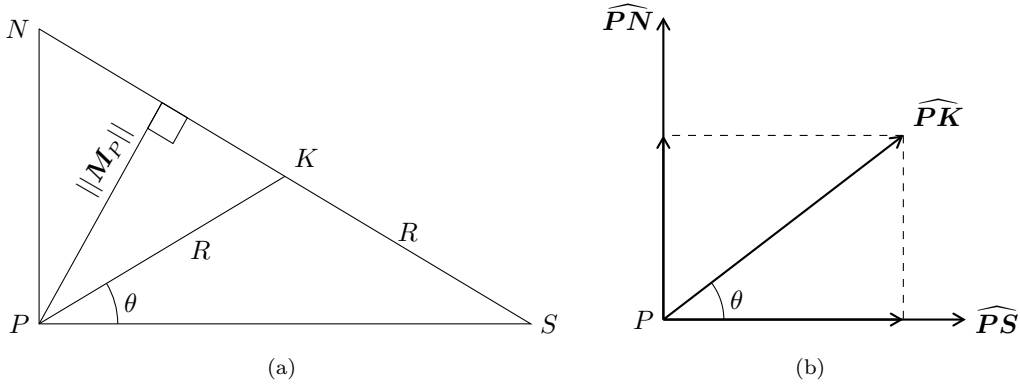


FIGURA 3.2. (a) Triángulo rectángulo formado por los puntos  $S$ ,  $P$  y  $N$ . (b) Descomposición del vector  $\widehat{PK}$  en una componente paralela a  $\widehat{PN}$  y otra paralela a  $\widehat{PS}$ .

A partir de la expresión anterior, para obtener  $\widehat{M}_P$  sólo hemos de rotar  $\widehat{PK}$   $\pi/2$  radianes hacia  $N$ , como se observa en la Figura 3.1(b), con lo que llegamos a que

$$\widehat{M}_P = \cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \widehat{PS} + \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \widehat{PN} = \widehat{SP} \sin \theta + \widehat{PN} \cos \theta,$$

justo lo que queríamos obtener. Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\cos \theta = \frac{PK \cdot PS}{\|PK\| \|PS\|}, \quad \sin \theta = \frac{PK \cdot PN}{\|PK\| \|PN\|},$$

se llega a la expresión buscada. □

LEMA 3.22. La norma de  $M_P$  viene dada por

$$(3.3) \quad \|M_P\| = \frac{\|PN\| \|PS\|}{2R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que  $\|\mathbf{M}_P\|$  es igual a la distancia de  $P$  al diámetro  $SN$ , tal y como se muestra en la Figura 3.2(a). Por un lado, se tiene que el área del triángulo  $SPN$  viene dada por

$$\text{área}_{SPN} = \frac{1}{2} \|\mathbf{SN}\| \|\mathbf{M}_P\| = R \|\mathbf{M}_P\|,$$

mientras que, por otro lado, podemos expresar el mismo área mediante

$$\text{área}_{SPN} = \frac{1}{2} \|\mathbf{PN}\| \|\mathbf{PS}\|,$$

de donde, igualando ambas expresiones, se llega a que

$$\|\mathbf{M}_P\| = \frac{\|\mathbf{PN}\| \|\mathbf{PS}\|}{2R},$$

como buscábamos.  $\square$

PROPOSICIÓN 3.23. *El campo  $\mathbf{M}$  tiene la siguiente representación analítica:*

$$(3.4) \quad \mathbf{M}_P = \frac{(\mathbf{PK} \cdot \mathbf{PN})\mathbf{SP} + (\mathbf{PK} \cdot \mathbf{PS})\mathbf{PN}}{2R^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando los Lemas 3.21 y 3.22, a partir de las expresiones (3.2) y (3.3) se obtiene directamente que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_P &= \|\mathbf{M}_P\| \widehat{\mathbf{M}_P} = \frac{\|\mathbf{PN}\| \|\mathbf{PS}\|}{2R} \left( \widehat{\mathbf{SP}} \cdot \frac{\mathbf{PK} \cdot \mathbf{PN}}{\|\mathbf{PK}\| \|\mathbf{PN}\|} + \widehat{\mathbf{PN}} \cdot \frac{\mathbf{PK} \cdot \mathbf{PS}}{\|\mathbf{PK}\| \|\mathbf{PS}\|} \right) \\ &= \frac{(\mathbf{PK} \cdot \mathbf{PN})\mathbf{SP} + (\mathbf{PK} \cdot \mathbf{PS})\mathbf{PN}}{2R^2}, \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

**3.2.3. Campos meridianos coordenados.** Introduzcamos ahora, sobre la esfera  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n$  campos meridianos particulares, caracterizados por tener los puntos singulares sobre el primer, segundo, ..., último eje coordenado, respectivamente. A dichos campos los denominaremos *campos meridianos coordenados* y los denotaremos mediante  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ .

PROPOSICIÓN 3.24. *Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , las coordenadas de los vectores del campo  $\mathbf{X}_i$  vienen dadas por los elementos de la  $i$ -ésima fila de la matriz (3.1).*

DEMOSTRACIÓN. Refrámonos, para mayor claridad, al campo  $\mathbf{X}_1$ . En ese caso, se tendrá que

$$\mathbf{S} = (-1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{N} = (1, 0, \dots, 0),$$

de modo que  $\mathbf{PN} = (1 - x_1, -x_2, \dots, -x_n)$  y  $\mathbf{PS} = (-1 - x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ . Además, dado que en esta subsección estamos trabajando con  $S^{n-1}$ , se tiene  $K = O$ . Entonces,

$$\begin{aligned} (\mathbf{PO} \cdot \mathbf{PN})\mathbf{SP} &= ((-x_1, \dots, -x_n) \cdot (1 - x_1, -x_2, \dots, -x_n)) (1 + x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (-x_1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) (1 + x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (1 - x_1) (1 + x_1, x_2, \dots, x_n) = (1 - x_1^2, x_2(1 - x_1), \dots, x_n(1 - x_1)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{PO} \cdot \mathbf{PS})\mathbf{PN} &= ((-x_1, \dots, -x_n) \cdot (-1 - x_1, -x_2, \dots, -x_n)) (1 - x_1, -x_2, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) (1 - x_1, -x_2, \dots, -x_n) \\ &= (1 + x_1) (1 - x_1, -x_2, \dots, -x_n) = (1 - x_1^2, -x_2(1 + x_1), \dots, -x_n(1 + x_1)). \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo uso de la expresión (3.4) con  $R = 1$ , se obtiene  $\mathbf{X}_1 = (1 - x_1^2, -x_1x_2, \dots, -x_1x_n) = \mathbf{v}_1$ , como queríamos probar. Análogamente se prueba para el resto de los  $\mathbf{X}_i$ ,  $1 < i \leq n$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 3.25. *Para todo  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , con  $i \neq j$ , se verifica:*

- (I)  $\|\mathbf{X}_i\| = 1 - x_i^2$ .
- (II)  $\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j = -x_i x_j$ .

DEMOSTRACIÓN. Ambas afirmaciones son una mera comprobación:

- (I) Por la Proposición 3.24, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  se tiene que  $\|\mathbf{X}_i\|^2 = (1 - x_i^2)^2 + x_i^2 \sum_{j \neq i} x_j^2$ ; dado que  $\sum_{j \neq i} x_j^2 = 1 - x_i^2$ , llegamos a que  $\|\mathbf{X}_i\|^2 = 1 - 2x_i^2 + x_i^4 + x_i^2 - x_i^4 = 1 - x_i^2$ .
- (II) Sea  $A = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j &= -x_i x_j (1 - x_i^2 + 1 - x_j^2) + x_i x_j \sum_{k \in A} x_k^2 \\ &= -x_i x_j (2 - x_i^2 - x_j^2) + x_i x_j (1 - x_i^2 - x_j^2) = -x_i x_j. \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

**3.2.4. Producto de una hipersuperficie paralelizable por una esfera.** Las herramientas introducidas en las subsecciones anteriores nos permiten probar ahora un curioso resultado: el producto de una hipersuperficie paralelizable por una esfera es también paralelizable. Además, la siguiente proposición proporciona un método para construir la paralelización del producto de forma explícita.

PROPOSICIÓN 3.26. Sea  $M \subset \mathbb{R}^{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1})$  una variedad paralelizable de dimensión  $m$ , y sea  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1})$ . Sea  $\{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_m\}$  una p. s. de  $M$ , y sean  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n+1}$  los campos meridianos coordenados relativos a  $S^n$ . Se verifica que la variedad producto  $M' = M \times S^n \subset \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$  es paralelizable, y una p. s. de  $M'$  viene dada por el conjunto de campos

$$\{\mathbf{W}_i\}_{1 \leq i \leq m-1} \cup \{\mathbf{Z}_j\}_{1 \leq j \leq n+1} \subset \mathfrak{X}(M'),$$

donde  $\mathbf{W}_i = (\mathbf{V}_i, \mathbf{0})$  y  $\mathbf{Z}_j = (y_j \mathbf{V}_m, \mathbf{Y}_j)$ .<sup>9</sup>

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que probar que los campos del enunciado son unitarios y ortogonales dos a dos. Dado que los campos  $\{\mathbf{V}_i\}_{1 \leq i \leq m-1}$  lo son y, para cada  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ , el campo  $\mathbf{W}_i$  se obtiene añadiendo  $n+1$  ceros al final de  $\mathbf{V}_i$ , es claro que también los campos  $\{\mathbf{W}_i\}_{1 \leq i \leq m-1}$  son unitarios y ortogonales dos a dos. Además, es evidente que  $\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{Z}_j = (\mathbf{V}_i, \mathbf{0}) \cdot (y_j \mathbf{V}_m, \mathbf{Y}_j) = 0$ . Luego sólo falta por ver que  $\|\mathbf{Z}_j\| = 1$  para todo  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  y que  $\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{Z}_j = 0$  si  $i \neq j$ . Por un lado, se tiene que

$$\|\mathbf{Z}_j\|^2 = y_j^2 \|\mathbf{V}_m\|^2 + \|\mathbf{Y}_j\|^2 = y_j^2 + \|\mathbf{Y}_j\|^2 = 1,$$

pues, por el punto (I) de la Proposición 3.25, se tiene que  $\|\mathbf{Y}_j\|^2 = 1 - y_j^2$ . Por otro lado, si  $i \neq j$ ,

$$\mathbf{Z}_i \cdot \mathbf{Z}_j = (y_i \mathbf{V}_m, \mathbf{Y}_i) \cdot (y_j \mathbf{V}_m, \mathbf{Y}_j) = y_i y_j \|\mathbf{V}_m\|^2 + \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{Y}_j = y_i y_j + \mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{Y}_j = 0,$$

pues, por el punto (II) de la Proposición 3.25, se tiene que  $\mathbf{Y}_i \cdot \mathbf{Y}_j = -y_i y_j$ . Así pues, hemos probado que los campos del enunciado son unitarios y ortogonales dos a dos, por lo que constituyen una p. s. de  $M'$  y, por tanto,  $M'$  es paralelizable.  $\square$

OBSERVACIÓN 3.27. No deja de ser sorprendente que solamente haya tres esferas paralelizables y, en cambio, siempre lo sea el producto de una esfera de cualquier dimensión por una hipersuperficie paralelizable.

PROPOSICIÓN 3.28. Sea  $m \in \{1, 3, 7\}$ . Entonces,  $S^m \times S^n$  es paralelizable para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

DEMOSTRACIÓN. En la Proposición 3.6 se probó que  $S^1$ ,  $S^3$  y  $S^7$  son paralelizables y se dio una p. s. en cada uno de los casos. Así pues,  $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$  es una hipersuperficie paralelizable para cada  $m \in \{1, 3, 7\}$ , por lo que, aplicando la Proposición 3.26, se tiene que  $S^m \times S^n$  es paralelizable para todo  $n \in \mathbb{N}$ , como queríamos probar. Además, tomando  $\mathbf{V}_i = \mathbf{T}_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  (o  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{T}$ , si  $m = 1$ ), se obtiene una paralelización explícita de  $S^m \times S^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

<sup>9</sup>Denotamos mediante  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  el campo sobre  $M'$  que tiene  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  como respectivas proyecciones sobre  $\mathbb{R}^{m+1}$  y  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Nótese que, para el producto de dos variedades cualesquiera  $M$  y  $N$ , se tiene  $T_{(P,Q)}(M \times N) = T_P M \times T_Q N$ , luego, en este caso en particular,  $T_{(P,Q)}(\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n+1}) = T_P \mathbb{R}^{m+1} \times T_Q \mathbb{R}^{n+1}$ ; es claro, por tanto, el sentido en el cual hay que interpretar el producto  $\mathbf{W}_i \cdot \mathbf{Z}_j$ .

EJEMPLO 3.29. Vamos a construir una paralelización explícita de  $S^3 \times S^2$  haciendo uso de la Proposición 3.26. Dado que  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  es una hipersuperficie paralelizable, sabemos que el producto  $S^3 \times S^2 \subset \mathbb{R}^7$  es paralelizable. Sobre la esfera  $S^2$  tendremos los tres campos meridianos coordinados siguientes:

$$\begin{aligned} Y_1 &= (1 - y_1^2, -y_1y_2, -y_1y_3), \\ Y_2 &= (-y_2y_1, 1 - y_2^2, -y_2y_3), \\ Y_3 &= (-y_3y_1, -y_3y_2, 1 - y_3^2), \end{aligned}$$

por lo que, aplicando la Proposición 3.26, se obtiene que una p. s. de  $S^3 \times S^2$  vendrá dada por los siguientes campos:

$$\begin{aligned} W_1 &= (T_1, 0) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, 0, 0, 0), \\ W_2 &= (T_2, 0) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2, 0, 0, 0), \\ Z_1 &= (y_1T_3, Y_1) = (-y_1x_4, -y_1x_3, y_1x_2, y_1x_1, 1 - y_1^2, -y_1y_2, -y_1y_3), \\ Z_2 &= (y_2T_3, Y_2) = (-y_2x_4, -y_2x_3, y_2x_2, y_2x_1, -y_2y_1, 1 - y_2^2, -y_2y_3), \\ Z_3 &= (y_3T_3, Y_3) = (-y_3x_4, -y_3x_3, y_3x_2, y_3x_1, -y_3y_1, -y_3y_2, 1 - y_3^2). \end{aligned}$$

**3.2.5. Paralelización del producto de tres o más esferas.** Para concluir esta exposición sobre la paralelización de esferas, vamos a probar que el producto de tres o más esferas es paralelizable siempre y cuando una de ellas tenga dimensión 1, 3 o 7. Antes, no obstante, necesitamos probar el siguiente lema:

LEMA 3.30. *El producto de esferas  $\prod_{i=1}^k S^{n_i}$  admite un embedding regular en  $\mathbb{R}^{1+n_1+\dots+n_k}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Probemos, en primer lugar, que  $\mathbb{R} \times S^n$  se puede sumergir en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (t, P) &\longmapsto e^t P \end{aligned}$$

que sitúa sobre cada punto de  $S^n$  la semirrecta vectorial definida por el punto. Esta aplicación es un difeomorfismo que nos proporciona un embedding regular de  $\mathbb{R} \times S^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Veamos ahora que  $\prod_{i=1}^k S^{n_i}$  se puede sumergir en  $\mathbb{R}^{1+n_1+\dots+n_k}$ , para lo cual procederemos por inducción sobre el número de esferas; en el caso  $k = 2$ , se tiene que

$$S^{n_1} \times S^{n_2} \subset \mathbb{R}^{n_1+1} \times S^{n_2} = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R} \times S^{n_2} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2+1} = \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}.$$

Supongamos ahora que el resultado es cierto para el producto de  $k$  esferas y probemos que, entonces, también lo es para  $k + 1$  esferas. Procediendo de forma análoga al caso anterior, se tendrá que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} S^{n_i} &= \left( \prod_{i=1}^k S^{n_i} \right) \times S^{n_{k+1}} \subset \mathbb{R}^{1+n_1+\dots+n_k} \times S^{n_{k+1}} \\ &= \mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k} \times \mathbb{R} \times S^{n_{k+1}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k} \times \mathbb{R}^{1+n_{k+1}} = \mathbb{R}^{1+n_1+\dots+n_k+n_{k+1}}, \end{aligned}$$

como queríamos probar.  $\square$

El lema anterior nos permite probar, finalmente, el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.31. *Sean  $m \in \{1, 3, 7\}$  y  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Se verifica que el producto  $S^m \times \prod_{i=1}^k S^{n_i}$  es paralelizable.*

DEMOSTRACIÓN. Procedamos por inducción en el número  $k$  de esferas. Sea  $k = 2$ ; por la Proposición 3.28, se tiene que  $S^m \times S^{n_1}$  es paralelizable, y por el Lema 3.30 podemos sumergir dicho producto como hipersuperficie paralelizable de  $\mathbb{R}^{1+m+n_1}$ . Por tanto, aplicando la Proposición 3.26, llegamos a que  $S^m \times S^{n_1} \times S^{n_2}$  es paralelizable. Sea ahora  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 2$ , y supongamos que el producto  $S^m \times \prod_{i=1}^k S^{n_i}$  es paralelizable. Llamemos  $M = S^m \times \prod_{i=1}^k S^{n_i}$ , que tendrá dimensión  $p = m + \sum_{i=1}^k n_i$ . Por el Lema 3.30, dicha variedad admite un embedding regular en  $\mathbb{R}^{p+1}$ , por lo que  $M$  es una hipersuperficie paralelizable y, por la Proposición 3.26, se tiene que  $M \times S^{n_{k+1}}$  es paralelizable, como queríamos probar.  $\square$



## Referencias

- [Ada60] ADAMS, J. F., On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.*, 72 (1960), 20–104.
- [Ada94] ADAMS, C. C., *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. W. H. Freeman and Company, New York, 1994, 16–22.
- [Agr+18] AGRICOLA, I. et al., On the history of the Hopf problem. *Differ. Geom. Appl.*, 57 (2018), 1–9.
- [Bae02] BAEZ, J. C., The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39 (2002), n.º 2, 145–205.
- [BC70] BRICKELL, F. y CLARK, R. S., *Differentiable manifolds: an introduction*. Van Nostrand, London, 1970.
- [Ber87] BERGER, M., *Geometry*. Springer–Verlag, Berlín, 1987.
- [Bes78] BESSE, A. L., *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*. Springer–Verlag, 1978.
- [BM58] BOTT, R. y MILNOR, J., On the parallelizability of spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64 (1958), 87–89.
- [Bru92] BRUNI, M., Sulla parallelizzazione esplicita dei prodotti di sfere. *Rend. di Mat.* (VII), 12 (1992), 405–423.
- [BS51] BOREL, A. y SERRE, J. P., Détermination des  $p$ -puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques. Applications. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 233 (1951), 680–682.
- [Caw04] CAWAGAS, R. E., On the structure and zero divisors of the Cayley–Dickson sedenion algebra. *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.*, 24 (2004), 251–265.
- [Cay45] CAYLEY, A., On Jacobi’s elliptic functions, in reply to the Rev. B. Bronwin; and on quaternions. *Philos. Mag.*, 26 (1845), 208–211.
- [CS03] CONWAY, J. H. y SMITH, D. A., *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*. AK Peters, 2003.
- [Don83] DONALDSON, S. K., An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.*, 18 (1983), 279–315.
- [EF51] ECKMANN, B. y FRÖLICHER, A., Sur l’intégrabilité des structures presque-complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 232 (1951), 2284–2286.
- [EL51] EHRESMANN, C. y LIBERMANN, P., Sur les structures presque hermitiennes isotropes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 232 (1951), 1281–1283.
- [Eta16] ETAYO, F., *Elementos de topología algebraica: grupo fundamental y clasificación de superficies*. Sanz y Torres, 2016, 47–51.
- [GR99] GAMBOA, J. M. y RUIZ, J. M., *Iniciación al estudio de las variedades diferenciables*. Sanz y Torres, 1999.
- [Gra82] GRAVES, R. P., *Life of Sir Rowan Hamilton*. Vol. II. Dublin, Hodges, Figgis, & co.; [etc., etc.], 1882. Chap. XXVIII.
- [Hal91] HALMOS, P. R., *Paul Halmos: Celebrating 50 years of mathematics*. Ed. por J. H. Ewing y F. W. Gehring. Springer, 1991.
- [Ham44] HAMILTON, W. R., On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra. *Philos. Mag.* (1844–1850).
- [Hir76] HIRSCH, M. W., *Differential topology*. Springer–Verlag, 1976, 130–131.
- [Hop31] HOPF, H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.*, 104 (1931), n.º 1, 637–665.
- [Hur98] HURWITZ, A., Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1898), 309–316.
- [Joh11] JOHNSON, N., A visualization of the Hopf fibration. 2011. Accesible en: <https://nilesjohnson.net/hopf.html>.
- [Ker56] KERVARE, M., Courbure intégrale généralisée et homotopie. *Math. Ann.*, 131 (1956), 219–252.
- [Ker58] KERVARE, M., Non-parallelizability of the  $n$ -sphere for  $n > 7$ . *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 44 (1958), 280–283.
- [Kir47] KIRCHHOFF, A., Sur l’existence de certain champs tensoriels sur les sphères à  $n$  dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 225 (1947), 1258–1260.
- [KM63] KERVARE, M. y MILNOR, J., Groups of homotopy spheres: I. *Ann. of Math.* (2), 77 (1963), n.º 3, 504–537.
- [KN69] KOBAYASHI, S. y NOMIZU, K., *Foundations of differential geometry*. Vol. II. Interscience Publishers, 1969.
- [KP18] KONSTANTIN, P. y PARTON, M., Almost complex structures on spheres. *Differ. Geom. Appl.*, 57 (2018), 10–22.
- [Lyo03] LYONS, D. W., An Elementary Introduction to the Hopf Fibration. *Math. Mag.*, 76 (2003), n.º 2, 87–98.
- [Mas80] MASSEY, W. S., *Singular homology theory*. Springer–Verlag, 1980.
- [McE15] MCENROE, R., Milnor’s construction of exotic 7-spheres. *The University of Chicago Mathematics REU* 2015 (2015).
- [NN57] NEWLANDER, A. y NIRENBERG, L., Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math.* (2), 65 (1957), n.º 3, 391–404.
- [Par03] PARTON, M., Explicit Parallelizations on Products of Spheres and Calabi–Eckmann Structures. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, XXXV (2003), 61–67.
- [Rol76] ROLFSEN, D., *Knots and links*. Publish or Perish, 1976, 132–133.
- [RSRS98] RODRÍGUEZ-SANJURJO, J. M. y RUIZ SANCHEZ, J. M., *Geometría Proyectiva*. Addison-Wesley, 1998.

- [Sch66] SCHAFER, R. D., *An Introduction to Nonassociative Algebras*. Academic Press Inc, New York, 1966.
- [Ste74] STEENROD, N., *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press, 1974.
- [Tau87] TAUBES, C. H., Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, 25 (1987), 363–430.
- [Tre09] TREISMAN, Z., A young person’s guide to the Hopf fibration. 2009. arXiv: [0908.1205 \[math.HO\]](#).
- [Whi36] WHITNEY, H., Differentiable manifolds. *Ann. of Math.* (2), 37 (1936), 645–680.
- [Whi44] WHITNEY, H., The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space. *Ann. of Math.* (2), 45 (1944), n.º 3, 220–246.
- [Zor30] ZORN, M., Theorie der alternativen Ringe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 8 (1930), 123–147.



